

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**Физический факультет
Кафедра общей физики**

И. А. Котельников, В. С. Черкасский

Скин-эффект в задачах

Электронный учебник

**Новосибирск
2013**

Аннотация. Электронный учебник содержит широкий круг задач с решениями, посвящённых скин-эффекту. В учебник входят как стандартные задачи о скин-эффекте в различных геометриях (шар, цилиндр, полуплоскость), так и оригинальные задачи, впервые решённые авторами: нестационарный скин-эффект, экранирование электрического и магнитного полей, скин-эффект в трубах со щелями. Учебник снабжён динамическими интерактивными иллюстрациями, которые помогают студенту самостоятельно экспериментировать с параметрами задачи и наблюдать возникающие при этом эффекты. Динамические иллюстрации реализованы с помощью бесплатного приложения CDFPlayer, разработанного корпорацией **Wolfram Research Inc.** CDFPlayer позволяет визуализировать решения задач, построенные с помощью коммерческого пакета *Mathematica* той же корпорации, без использования самого пакета.

Электронный учебник разработан в рамках реализации **Программы развития НИУ НГУ на 2009-2018 годы.**

Рецензент: доцент С.Л. Сеницкий

Оглавление

5		Предисловие	
8		Глава 1	
		Токи Фуко и скин-эффект	
1		Основные уравнения	9
2		Непроводящая среда	10
3		Начальная задача	10
4		Граничная задача	11
5		Скиновое приближение	12
14		Глава 2	
		Стационарный скин-эффект	
1		Скин-эффект на плоской границе	14
2		Скин-эффект в цилиндре	27
3		Скин-эффект в шаре	42
51		Глава 3	
		Экранирование переменного магнитного поля	
1		Продольное магнитное поле	52
2		Поперечное магнитное поле	60
3		Экран с разрезом	64
69		Глава 4	
		Нестационарный скин-эффект	
1		Автомодельное решение	70
2		Метод преобразования Лапласа	72

78 | Глава 5
Заключение
 Благодарности 79

80 | Глава А
Полезные математические формулы
 1 Вычисление среднего от гармонических функций 80

81 | Литература

Предисловие

Скин-эффект имеет важные приложения во многих разделах физики и техники, поэтому его изучение входит в обязательную программу обучения студентов физических и технических специальностей университетов. На физическом факультете Новосибирского государственного университета (НГУ) эффект скинирования электромагнитного поля в проводящей среде кратко рассматривается в курсе «Электричество и магнетизм» [1], содержание которого приблизительно соответствует монографии «Электромагнитное поле» И.Н. Мешкова и Б.В. Чирикова [2].

Существует множество монографий и учебников, где явление скинирования рассматривается с той или иной степенью полноты. Весьма подробно классический скин-эффект описан в учебниках И.Е. Тамма [3], А. Зоммерфельда [4], Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [5] в разделах, посвящённых квазистационарным явлениям.

Более краткое изложение содержат классические университетские курсы физики А.Н. Матвеева [6] и Д.В. Сивухина [7]. Авторы этих и других подобных учебников обычно ограничиваются только задачей о распределении переменного тока в проводящем полупространстве либо в цилиндрическом проводнике. Далее на основе решения этой задачи рассматривается выделение джоулева тепла в проводнике, вычисляется комплексное сопротивление и т.п.

Важным дополнением к перечисленным учебникам являются сборники задач по классической электродинамике. Среди них следует выделить уникальное издание книги В. Смайта [8], давно ставшее библиографической редкостью, а также сборник задач В.В. Батыгина и И.Н. Топтыгина [9], по которому учились несколько поколений российских физиков. Большая часть задач, которые решены в этих сборниках, требуют высокого уровня владения методами математической физики, которые традиционно читаются уже после курса общей физики практически во всех вузах. В частности, авторы указанных сборников часто сначала приводят строгое математическое решение базовой задачи в общем случае, а для физически интересных предельных случаев сильного и слабого скин-эффекта приводят лишь ответы, которые по-

лучаются из асимптотик точных решений.

Исключение составляет сборник задач [10], отражающий опыт преподавания курса электродинамики НГУ, где методическое руководство семинарскими занятиями много лет осуществлял профессор Генрий Викторович Меледин. В этом сборнике объединены качественное рассмотрение явлений, характерное для курса общей физики, и строгий подход математической физики.

В данном электронном учебном пособии мы собрали задачи, посвящённые скин-эффекту. Часть из них заимствована из перечисленных выше источников, а также из статьи [11] В.В. Бажановой, Г.В. Меледина и Ю.И. Эйдельмана. Некоторые задачи впервые решены авторами данного пособия. В первую очередь это относится к задачам об экранировании квазистатических полей тонкостенными проводящими экранами. Мы попытались соединить достоинства упомянутых выше сборников задач [8, 9, 10], подробно изложив как точные решения, в тех случаях, когда они известны, так и детально описав методы решения задач в предельных случаях «слабого» и «сильного» скин-эффектов. Кроме этого, мы воспользовались преимуществами электронного формата учебного пособия, чтобы дополнить «письменное» описание хода решения компьютерными интерактивными моделями. Они особенно полезны для визуализации сложных математических выражений, которые содержат спецфункции комплексного аргумента. Такие модели также удобны для сравнения точных и приближённых решений и для выработки у студентов наглядных представлений о поведении многопараметрических зависимостей.

При разработке интерактивных моделей мы использовали систему компьютерных вычислений *Mathematica* версии 9. Она позволяет создать CDF файлы, которые можно проигрывать при помощи свободно распространяемого приложения *CDFPlayer*, которое можно загрузить с сайта его производителя, корпорации *Wolfram*. Гиперссылки на разработанные интерактивные модели внедрены непосредственно в данный PDF файл, который представляет собой корневой модуль учебного пособия. Для его просмотра мы рекомендуем использовать бесплатно распространяемую программу *Adobe Reader*. Существуют также другие свободно распространяемые вьюеры PDF файлов, например *Foxit Reader*.

Для правильной работы гиперссылок в тексте корневого модуля каталог вспомогательных файлов Demo должен быть скопирован на компьютер пользователя рядом данным PDF файлом. Для удобства читателя ссылки на интерактивные модули приводятся в двух вариантах, так как приложение CDF Player можно **можно запустить в собственном окне** либо **в окне веб-браузера**. Во втором случае сначала будет выполнена проверка наличия проигрывате-

ля CDF файлов на компьютере пользователя и предложено установить CDF Player, если это не было сделано ранее.

Глава 1

Токи Фуко и скин-эффект

Постоянное электрическое поле в проводнике может существовать только при наличии тока, который поддерживается внешним источником электродвижущей силы (Э.Д.С.)

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.1)$$

Как следует из закона [Фарадея](#)¹ ([Michael Faraday](#))

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (1.2)$$

источником Э.Д.С. может служить изменение магнитного потока

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.3)$$

которое порождает вихревое электрическое поле \mathbf{E} . Вихревое электрическое поле в проводящей среде приводит к появлению электрических токов, которые носят название токов [Фуко](#) ([Leon Foucault](#)).

Токи Фуко экранируют переменное магнитное поле так, что оно не проникает вглубь проводника. Однако токи Фуко не могут экранировать статическое магнитное поле, так как из-за омического сопротивления они не могут существовать вечно. Статическое магнитное поле свободно проникает в проводник. Однако чем быстрее изменяется поле, тем на меньшую глубину оно проникает в проводник. В хороших проводниках, где омические потери

¹ Если при использовании русской ссылки Ваш веб-браузер не открывает требуемую страницу, воспользуйтесь английской ссылкой и на открывшейся странице Википедии выберите Русский язык в меню справа.

малы, уменьшение глубины проникновения поля становится заметным при весьма умеренных частотах. Это явление называют *скин-эффектом*. Происхождение термина связано со словом *skin*, которое в переводе с английского означает кожу.

1. Основные уравнения

Получим уравнения, описывающие скин-эффект. Для этого воспользуемся уравнениями **Максвелла** (James Clerk Maxwell)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В среде с заданными и постоянными диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ векторы индукции \mathbf{D} и \mathbf{B} электрического и магнитного полей связаны с напряжённостями этих полей \mathbf{E} и \mathbf{H} простейшими материальными уравнениями

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (1.5)$$

Относительно плотности тока \mathbf{j} предположим, что она пропорциональна \mathbf{E} с постоянным коэффициентом проводимости σ :

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (1.6)$$

Плотность свободных зарядов ρ далее будем считать равной нулю.

Возьмём ротор от третьего из уравнений (1.4):

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \mathbf{j}. \quad (1.7)$$

В его левой части воспользуемся векторным тождеством

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \nabla \operatorname{div} \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H}$$

и учтём, что $\operatorname{div} \mathbf{H} = \operatorname{div} \mathbf{B}/\mu = 0$. В правой части учтём, что

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{D} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{j} &= \sigma \operatorname{rot} \mathbf{E}, \end{aligned}$$

и исключим $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ с помощью первого уравнения (1.4). В результате получим уравнения для напряжённости магнитного поля \mathbf{H} :

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (1.8)$$

2. Непроводящая среда

В случае непроводящей среды (когда $\sigma = 0$) первое слагаемое в его правой части (1.8) равно нулю и мы приходим к волновому уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (1.9)$$

Как известно, волновое уравнение имеет решение в виде плоской монохроматической волны

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \quad (1.10)$$

с волновым вектором \mathbf{k} и частотой ω . Подставляя (1.10) в (1.9), немедленно находим дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = \frac{k^2 c^2}{\varepsilon \mu},$$

а из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ заключаем, что

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0.$$

Нетрудно проверить, что и $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$, если $\rho = 0$; следовательно, плоская монохроматическая волна поперечна.

3. Начальная задача

Рассмотрим эволюцию начального состояния поля с заданным \mathbf{k} в среде с произвольной проводимостью σ . Подстановка (1.10) в (1.8) приводит к дисперсионному уравнению

$$k^2 = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} i\omega + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \omega^2. \quad (1.11)$$

Решая его относительно ω , получим

$$\omega = -\frac{2\pi\sigma}{\varepsilon} \left(i \pm \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu} \left(\frac{ck}{2\pi\sigma} \right)^2 - 1} \right).$$

В плохо проводящей среде, при $ck/2\pi\sigma > \sqrt{\mu/\varepsilon}$, магнитное поле затухает с характерным временем

$$\tau_1 = 1/\operatorname{Im}(\omega) = \varepsilon/2\pi\sigma.$$

В среде с хорошей проводимостью, при $ck/2\pi\sigma \ll \sqrt{\mu/\varepsilon}$, имеются два характерных времени затухания

$$\tau_1 \approx \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma} \quad \text{и} \quad \tau_2 \approx \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2 k^2},$$

причём $\tau_2 \gg \tau_1$.

Аналогичным образом можно получить уравнение для электрического поля в среде, которое имеет вид, идентичный (1.8)

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (1.12)$$

Следовательно, электрическое поле затухает так же, как и магнитное.

4. Граничная задача

Рассмотрим теперь так называемую граничную задачу. Пусть на границу проводящей среды падает электромагнитная волна заданной частоты ω . Такая волна будет затухать по направлению вглубь проводящей среды. Теперь в уравнении (1.11) частоту ω следует считать заданной вещественной величиной, а находить следует волновое число k :

$$k = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu} \omega}{c} \sqrt{1 + i \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega}}.$$

Мнимая часть $\text{Im}(k)$ волнового числа характеризует глубину проникновения

$$\delta = 1/\text{Im}(k)$$

переменного электромагнитного поля в проводящую среду.

В среде с плохой проводимостью, где $4\pi\sigma \ll \varepsilon\omega$,

$$\delta \approx \frac{c}{2\pi\sigma} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}. \quad (1.13)$$

В обратном предельном случае

$$4\pi\sigma \gg \varepsilon\omega, \quad (1.14)$$

используя тождество $\sqrt{2i} = \sqrt{(1+i)^2} = 1+i$, получаем

$$k \approx \frac{1+i}{\delta}, \quad (1.15)$$

где

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}. \quad (1.16)$$

Для промышленной частоты 50 Гц ($\lambda = 6\,000$ км) толщина скин-слоя в меди $\delta \approx 1$ см, а в радиодиапазоне ($\lambda = 600$ м) $\delta \approx 0,1$ мм.

5. Скиновое приближение

Говоря о скин-эффекте обычно имеют ввиду случай сильной проводимости ($4\pi\sigma \gg \varepsilon\omega$). Далее мы так и будем делать, подразумевая, что формула (1.16), а не (1.13) определяет *толщину скин-слоя*. Заметим, что в этом случае можно пренебречь вторым слагаемым в правой части уравнения (1.8). Полученное в результате такого упрощения уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu} \nabla^2 \mathbf{H} \quad (1.17)$$

очень похоже на уравнение диффузии

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \nabla^2 n, \quad (1.18)$$

которое возникает в задаче о броуновском движении. Аналогичное уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \nabla^2 T \quad (1.19)$$

возникает в задаче теплопроводности, которое впервые было изучено французским физиком и математиком **Фурье** (фр. **Jean Baptiste Joseph Fourier**), который разработал специальный метод решения этого уравнения путём разложения искомой функции в ряд Фурье. Величины D и χ называются соответственно коэффициентами диффузии и температуропроводности. Ввиду указанной аналогии коэффициент

$$D_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu} \quad (1.20)$$

в уравнении (1.17) иногда называют коэффициентом магнитной диффузии.

Заметим, что при тех же предположениях, для которых получено уравнение (1.17) путём отбрасывания второго слагаемого в правой части уравнения

(1.8) в однородном проводнике электрическое поле удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu} \nabla^2 \mathbf{E}, \quad (1.21)$$

которое получается из уравнения (1.12) также после отбрасывания малого второго слагаемого. Поскольку $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, в однородном проводнике плотность тока также удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu} \nabla^2 \mathbf{j}. \quad (1.22)$$

С практической точки зрения, эффект скинирования тока, быть может, более значим, особенно в радиотехнике, но далее мы в основном будем решать задачи о проникновении в проводящую среду магнитного поля.

Глава 2

Стационарный скин-эффект

1. Скин-эффект на плоской границе

Изучение скин-эффекта обычно начинают с задачи о проникновении в проводник магнитного поля, изменяющегося по гармоническому закону. Хотя решение этой задачи, равно как и вывод уравнения (1.17), приведены в большинстве учебников по классической электродинамике, кратко повторим основные этапы решения, поскольку далее мы будем неоднократно к нему обращаться вновь.

Применим уравнение (1.17) к участку поверхности проводника, столь малому, что его можно считать плоским.¹ Пусть внутренняя нормаль к этому участку поверхности совпадает с положительным направлением оси x (Рис. 2.1). В такой формулировке мы приходим к задаче о проникновении переменного магнитного поля в полупространство, занятое проводником. Пусть это поле зависит только от времени t и координаты x ; зависимостью от координат y, z пренебрегаем, считая, что толщина скин-слоя δ существенно меньше длины волны λ вдоль этих координат,

$$\delta \ll \lambda. \quad (2.1)$$

Кроме того, можно считать, что магнитное поле параллельно плоской границе. Наличие проекции переменного магнитного поля на направление нормали к поверхности противоречило бы уравнению $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$. Действительно, из него следует, что $\partial H_x / \partial x = 0$, т.е. H_x есть функция, не зависящая от координат. Но тогда из уравнения (1.17) следует, что $\partial H_x / \partial t = 0$, т.е. H_x не зависит также и от времени. Поскольку поле, постоянное во времени и в простран-

¹ Для этого необходимо, по крайней мере, чтобы кривизна поверхности была больше толщины скин-слоя.

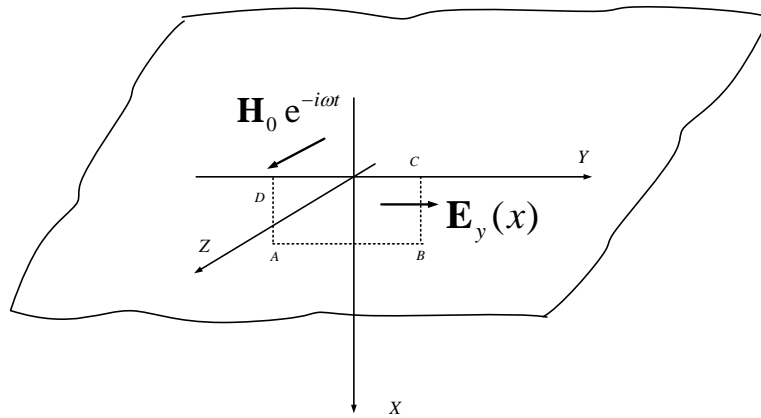


Рис. 2.1: Скин-эффект на плоской границе проводника.

стве, нас здесь не интересует, будем считать, что $H_x = 0$. Таким образом, мы приходим к следующей задаче.

Задача 1. Полупространство $x > 0$ занято хорошо проводящей средой. На его границе создано переменное магнитное поле $\mathbf{H} = H_0 \hat{e}_z \cos(\omega t)$, направленное вдоль оси z . Найти магнитное поле в проводнике.

Решение. Выбрав в уравнении (1.17) проекцию на ось z , запишем её в виде

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = D_m \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}. \quad (2.2)$$

Поскольку поле вне проводника зависит от времени по гармоническому закону, то и внутри проводника

$$H_z(0, t) = H_0 \cos(\omega t) \quad (2.3)$$

на его границе при $x = 0$. Гармоническая зависимость (2.3) характеризует так называемый стационарный скин-эффект. Любая другая зависимость от времени поля на границе относится к случаю нестационарного скин-эффекта, который будет рассмотрен в главе 4.

Поскольку уравнение (2.2) линейно и к тому же содержит только вещественные коэффициенты, последующие выкладки можно существенно упростить, если перейти к комплексной записи. Будем искать решение другой, вспомогательной задачи.

Она получается заменой $\cos(\omega t)$ в известной зависимости поля вне проводника на комплексную экспоненту:

$$H_z(0, t) = H_0 e^{-i\omega t}. \quad (2.4)$$

Решение исходной задачи с вещественным полем можно получить из решения этой вспомогательной задачи с комплексным полем путём отделения вещественной части. Нетрудно видеть, что если некоторая комплексная функция $H_z(x, t)$ доставляет решение линейному уравнению (2.2) с действительными коэффициентами, то функция $H_z^*(x, t)$, комплексно сопряженная ей, также является решением этого уравнения. Отсюда следует, что вещественная часть $\text{Re } H_z(x, t) = [H_z(x, t) + H_z^*(x, t)]/2$ решения вспомогательной задачи является решением исходной задачи.

Поскольку магнитное поле вне проводника пропорционально $\exp(-i\omega t)$, предположим, что решение вспомогательной задачи следует искать в виде

$$H_z(x, t) = H(x) \exp(-i\omega t). \quad (2.5)$$

Подставив эту зависимость в уравнение с частными производными (2.2), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = -\frac{2i}{\delta^2} H, \quad (2.6)$$

где обозначение

$$\delta = \sqrt{\frac{2D_m}{\omega}} = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}},$$

имеет размерность длины. Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами следует искать в виде суммы экспонент $A \exp(ikx)$ с постоянными коэффициентами A и k .² Коэффициент k находим, подставив $\exp(ikx)$ в уравнение (2.6). Получившееся алгебраическое уравнение

$$k^2 = \frac{2i}{\delta^2}$$

имеет два корня

$$k_{\pm} = \pm \frac{1+i}{\delta}.$$

Один из них (k_+) отвечает убывающему, а другой (k_-) — нарастающему вглубь проводника (при $x \rightarrow \infty$) переменному магнитному полю. В рассматриваемой задаче о

² Вообще говоря, коэффициент A может быть полиномом степени $n-1$, где n — число одинаковых (вырожденных) корней характеристического алгебраического уравнения, которое получается из дифференциального уравнения после подстановки в него экспонент. Однако в нашей задаче корни характеристического уравнения не вырождены.

проводнике, занимающем полупространство, нарастающее решение следует отбросить, так как оно отвечает бессмысленному увеличению магнитного поля вплоть до бесконечного значения при удалении от источника поля, каковым является поле на границе. Таким образом, внутри проводника, в области $x > 0$, решение вспомогательной задачи имеет вид:

$$H_z(x, t) = A \exp[-(1 - i)x/\delta] \exp(-i\omega t).$$

Коэффициент A находим из условия непрерывности тангенциальной проекции напряжённости магнитного поля на границе проводника при $x = 0$. Поскольку вне проводника при $x = 0$ напряжённость магнитного поля изменяется по закону $H_z(0, t) = H_0 \exp(-i\omega t)$, заключаем, что $A = H_0$. Следовательно,

$$H_z(x, t) = H_0 \exp[-(1 - i)x/\delta] \exp(-i\omega t). \quad (2.7)$$

Отделяя вещественную часть комплексной функции $H_z(x, t)$ находим вещественное магнитное поле в проводнике:

$$H_z(x, t) = H_0 \exp(-x/\delta) \cos(\omega t - x/\delta). \quad (2.8)$$

Отсюда видно, что δ есть глубина проникновения переменного магнитного поля в проводящую среду. Эту глубину называют *толщиной скин-слоя*.

Для промышленной частоты $f = \omega/2\pi = 50$ Гц толщина скин-слоя в меди примерно равна 1 см. При $f = 5$ кГц она составляет 1 мм, а при $f = 50$ МГц становится микроскопически малой, $\delta = 10$ мкм.

Задача 2. В условиях предыдущей задачи найти электрическое поле и плотность тока в проводнике.

Решение. Чтобы найти электрическое поле в проводнике, используем третье из уравнений (1.4), в котором опустим ток смещения:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (2.9)$$

Отсюда с помощью закона Ома (1.6) находим

$$\mathbf{E} = \frac{c}{4\pi\sigma} \text{rot } \mathbf{H}. \quad (2.10)$$

Подставив сюда напряжённость магнитного поля (2.7), заключаем, что электрическое поле имеет только y -компоненту

$$E_y = (1 - i) \sqrt{\frac{\omega \mu}{8\pi \sigma}} H_z. \quad (2.11)$$

Подставив сюда H_z из формулы (2.7) и выделив вещественную часть, получаем

$$E_y(x, t) = \sqrt{\frac{\omega \mu}{4\pi \sigma}} H_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta + \pi/4). \quad (2.12)$$

Умножая этот результат на σ , находим распределение плотности тока в проводнике:

$$j_y(x, t) = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{4\pi}} H_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta + \pi/4). \quad (2.13)$$

Если толщина скин-слоя δ мала с макроскопическими размерами задачи, можно ввести понятие поверхностного тока

$$i = \int_0^\infty j_y dx.$$

Вычислив интеграл, получим

$$i = \frac{cH_0}{4\pi}. \quad (2.14)$$

Задача 3. Установить связь между магнитным и электрическим полями на поверхности проводника (граничное условие **Леонтовича**, (Leontovich)).

Решение. Поскольку тангенциальная проекция напряжённости электрического поля непрерывна на границе проводника, соотношение (2.11) верно также вне проводника, непосредственно у его поверхности. Записав (2.11) в векторной форме, приходим к *граничному условию Леонтовича*:

$$\mathbf{E}_\tau = \zeta [\mathbf{n}, \mathbf{H}_\tau]. \quad (2.15)$$

Оно связывает тангенциальные проекции \mathbf{E}_τ и \mathbf{H}_τ напряжённостей магнитного и электрического полей на границе проводника. Здесь \mathbf{n} обозначает вектор внешней нормали, направленный из проводника наружу. Коэффициент пропорциональности

$$\zeta = (1 - i) \sqrt{\frac{\omega \mu}{8\pi \sigma}} \quad (2.16)$$

в граничном условии Леонтовича называется *поверхностным импедансом*. В системе СГС ζ является безразмерной величиной. Граничное условие (2.15) имеет более широкую область применимости, чем конкретное выражение (2.16) для поверхностного импеданса.³

Для хороших проводников (таких, как медь) $\sigma \sim 10^{17} \text{ с}^{-1}$ и даже в радиодиапазоне $\zeta \ll 1$. В таких условиях $E \ll H$, поэтому, говоря о скин-эффекте, подразумевают в первую очередь скинирование магнитного поля. Малая величина отношения E/H в проводнике обусловлена той особенностью отражения электромагнитной волны от поверхности хорошего проводника, в результате которой электрические поля падающей и отраженной волны почти полностью компенсируют друг друга. Неудивительно поэтому, что в пределе $\sigma \rightarrow \infty$ граничное условие Леонтовича переходит в известное граничное условие

$$\mathbf{E}_\tau = 0$$

на поверхности идеального проводника.

³ Граничное условие Леонтовича можно использовать даже при очень большой частоте ω , когда необходимо учитывать зависимость удельной проводимости σ от частоты.

Задача 4. Найти электрическое поле и плотность тока в проводнике с помощью интегральной формы уравнения Фарадея.

Решение. Запишем закон Фарадея в интегральной форме:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.17)$$

Метод расчёта, основанный на интегральной форме уравнений, удобен, когда значение контурного интеграла слева можно найти без вычислений, используя симметрию задачи. В данном случае интеграл нам всё-таки придётся вычислить, но позднее мы встретим примеры, где явные вычисления не потребуются.

В качестве контура интегрирования выберем прямоугольник ABCD, как показано на Рис 2.1. Пусть его сторона AB имеет длину L , а сторона DC — длину x . Внешней нормалью к выбранному контуру с направлением обхода ABCD является единичный вектор \hat{e}_z . Поскольку поле \mathbf{E} имеет только y -компоненту, то интеграл по выбранному контуру равен

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = L [E(x, t) - E(0, t)]. \quad (2.18)$$

Интеграл в правой части (2.17) легко вычислить, считая, что магнитное поле уже найдено:

$$-\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\mu i \omega}{c} H_0 e^{-i\omega t} \frac{\delta L}{1-i} [e^{-(1-i)x/\delta} - 1]. \quad (2.19)$$

Приравнявая выражения (2.18) и (2.19), сначала используем условие $E(x \rightarrow \infty, t) = 0$, чтобы найти $E(0, t)$. Исключая затем $E(0, t)$ из (2.18), находим

$$E(x, t) = -\frac{\mu \omega \delta}{c} H_0 \frac{i}{1-i} e^{-(1-i)x/\delta} e^{-i\omega t}. \quad (2.20)$$

Выделяя вещественную часть в последнем выражении, вновь получаем формулу (2.12) для электрического поля.

Заметим, что в глубине проводника амплитуды напряжённостей магнитного (2.8), электрического поля (2.12) и плотности тока (2.13) убывают по экспоненциальному закону. При этом основная часть тока сосредоточена в поверхностном слое толщиной δ . Толщина скин-слоя δ уменьшается с частотой $\delta \sim 1/\sqrt{\omega}$. Условие применимости макроскопических уравнений поля, о которых говорилось выше, требует, чтобы δ было велико по сравнению с длиной свободного пробега электронов проводимости. При увеличении частоты это условие в металлах нарушается первым.

Задача 5. Найти мощность омических потерь в плоском скин-слое.

Решение. В соответствии с законом Джоуля-Ленца (James Prescott Joule, Heinrich Lenz), энергия, которая диссипирует в элементе объёма dV проводника в единицу времени, равна

$$dQ = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) dV = \sigma \langle E^2 \rangle dV, \quad (2.21)$$

где угловые скобки означают усреднение по времени. Существенно, что операция усреднения квадратичных величин и операция выделения вещественных частей \mathbf{j} и \mathbf{E} не коммутируют, поэтому \mathbf{j} и \mathbf{E} здесь предполагаются только вещественными.

Чтобы найти мощность, которая выделяется в столбике бесконечной длины с единичной площадью сечения, величину dQ следует проинтегрировать по x :

$$Q = \int_0^{\infty} \sigma \langle E^2 \rangle dx.$$

С помощью выражения (2.12) легко проверить, что

$$\langle E^2 \rangle = \frac{\omega \mu}{4\pi \sigma} H_0^2 e^{-2x/\delta} \langle \cos^2(\omega t - x/\delta + \pi/4) \rangle = \frac{\omega \mu}{8\pi \sigma} H_0^2 e^{-2x/\delta}. \quad (2.22)$$

Следовательно,

$$Q = \sqrt{\frac{\omega \mu}{8\pi \sigma}} \frac{c H_0^2}{8\pi}. \quad (2.23)$$

Вводя обозначение $E_0 = \sqrt{\omega \mu / 4\pi \sigma} H_0$ для амплитуды электрического поля на поверхности проводника, можно также записать, что

$$Q = \frac{\sigma \delta E_0^2}{4}. \quad (2.24)$$

Задача 6. Вычислить мощность омических потерь в плоском скин-слое с помощью граничного условия Леонтовича.

Решение. Решение предыдущей задачи проще получить с помощью граничного условия Леонтовича. Оно позволяет вычислить мощность, поглощаемую в скин-слое, не прибегая к интегрированию.

В расчёте на единицу площади поверхности проводника эта мощность Q равна среднему по времени потоку энергии электромагнитного поля

$$S_x = \frac{c}{4\pi} \langle E_y H_z \rangle \quad (2.25)$$

в направлении внутренней нормали к поверхности проводника (в нашем случае она направлена в положительном направлении оси x). Угловые скобки здесь означают усреднение по периоду изменения поля. Вычисления удобно проводить, используя комплексные формулы для представления переменных полей, однако при перемножении напряжённости полей необходимо сначала выделить вещественную часть полей, единственно имеющую физический смысл. Для напряжённости магнитного на границе проводника имеем

$$H_z = (H_0 e^{-i\omega t} + H_0 e^{+i\omega t})/2. \quad (2.26)$$

Напряжённость электрического поля находим из граничного условия Леонтовича, учитывая, что оно записано для комплексных функций:

$$E_y = (\zeta H_0 e^{-i\omega t} + \zeta^* H_0 e^{+i\omega t})/2. \quad (2.27)$$

При перемножении E_y и H_z получается два типа слагаемых. Одни из них не зависят от времени. Они остаются после усреднения по времени. Другие слагаемые пропорциональны $\exp(\pm i2\omega t)$. При усреднении они обращаются в нуль. В результате получаем:

$$Q = \frac{c \zeta'}{8\pi} H_0^2, \quad (2.28)$$

где

$$\zeta' = \frac{\zeta + \zeta^*}{2} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{8\pi \sigma}}$$

есть вещественная часть поверхностного импеданса. Нетрудно видеть, что формула (2.28) совпадает с (2.23).

В разделе 5 было отмечено, что уравнение, описывающее скин-эффект, формально совпадает с уравнениями диффузия и теплопроводности, поэтому явление скинирования можно наблюдать и при распространении тепла. Интересно, что в задаче о проникновении тепловой волны в некоторую среду существенным становится эффект запаздывания волны, на который редко обращают внимание в задачах о диффузии электромагнитного поля. На эффекте запаздывания основан принцип хранения пищевых продуктов в подземных погребах. Летом в погребе прохладнее, а зимой, наоборот, теплее, чем на поверхности земли.

Задача 7. На поверхности полупространства, заполненного однородной средой с коэффициентом температуропроводности χ , температура меняется вокруг среднего значения T_0 по гармоническому закону с частотой ω и амплитудой T_1 . Найти поле температуры в толще среды.

Решение. Запишем решение, используя аналогию с задачей о скинировании магнитного поля в проводник:

$$T = T_0 + T_1 e^{-x/\delta_T} \cos [\omega (t - x/\delta_T)]. \quad (2.29)$$

В данном случае $\delta_T = \sqrt{2\chi/\omega}$.

В соответствии с (2.29), на большой глубине, при $x \gg \delta_T$, колебания температуры практически исчезают и $T \rightarrow T_0$. Если частота ω характеризует сезонные или суточные колебания температуры на поверхности земли, то равновесная температура почвы легко может быть определена по измерениям на достаточной глубине

($x \gg \delta_T$). Если эта равновесная температура оказывается ниже точки замерзания почвенного рассола (раствор почвы в грунтовых водах), то возникает вечная мерзлота, не поддающаяся расплавлению под влиянием жаркого лета или внезапного наступления зноя.

Обратим внимание, что время t в ходит в решение задачи (2.29) в комбинации $t - x/\chi_T$. Это означает, что максимум (или минимум) температуры на глубине x достигается на время x/χ_T позднее, чем на поверхности, что составляет суть эффекта запаздывания. Запаздывание и уменьшение амплитуды колебаний температуры в глубине земли, которые описываются найденным решением, издавна используется людьми в повседневной жизни. Примером является хранение продуктов в заглублённых погребах. Действительно, характерная глубина скин-слоя для сезонных (полугодовых, $\omega \approx 10^{-6} \text{ с}^{-1}$) колебаний температуры составляет ≈ 1.5 м и для глубины $z \approx 5$ м «работать» будут оба фактора: в этом случае стабилизация температуры наступает на глубине $h \approx 3\delta_T \approx 5$ м, где сдвиг по фазе примерно равен π . В результате этого сдвига летняя температура T_L в погребе будет даже ниже зимней T_3 : $T_3 - T_L \approx \Delta T e^{-\pi} \approx 3^\circ \text{C}$ (здесь $\Delta T \approx 80^\circ \text{C}$ — годовые колебания температуры в Сибири).

Совершенно аналогично будущие строители станций на Луне могут подсчитать, насколько нужно её заглубить в лунный грунт, чтобы нивелировать суточные колебания температуры, достигающие там 500 градусов.

Задача 8. Широкая плита с проводимостью σ , магнитной проницаемостью μ , ограниченная плоскостями $x = \pm h$, находится во внешнем однородном магнитном поле $H_0 \hat{e}_z e^{-i\omega t}$, параллельном её поверхности. Найти магнитное поле в плите.

Решение. Как и в случае полубезграничного пространства, занятого проводником, ищем решение в виде

$$H_z(x, t) = H(x) e^{-i\omega t}, \quad (2.30)$$

где функция $H(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = -\frac{2i}{\delta^2} H, \quad (2.31)$$

причём $\delta = c/\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}$. Однако теперь граничные условия имеют вид

$$H(\pm h) = H_0. \quad (2.32)$$

Общее решение уравнения (2.31) имеет вид суммы двух экспонент

$$\exp(\pm(1-i)x/\delta).$$

Учитывая симметрии задачи относительно плоскости $x = 0$, нетрудно догадаться, что коэффициенты перед этими экспонентами должны быть одинаковы, поэтому

$$H(x) = A [e^{(1-i)x/\delta} + e^{-(1-i)x/\delta}] = 2A [\text{ch}(x/\delta) \cos(x/\delta) - i \text{sh}(x/\delta) \sin(x/\delta)].$$

Очевидно, что это выражение можно представить в виде

$$\begin{aligned} H(x) &= 2A \sqrt{\operatorname{ch}^2(x/\delta) \cos^2(x/\delta) + \operatorname{sh}^2(x/\delta) \sin^2(x/\delta)} \exp(-i\varphi(x)) = \\ &= 2A \sqrt{\cos^2(x/\delta) + \operatorname{sh}^2(x/\delta)} \exp(-i\varphi(x)), \end{aligned}$$

где

$$\varphi(x) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh}(x/\delta) \sin(x/\delta)}{\operatorname{ch}(x/\delta) \cos(x/\delta)}.$$

Определив теперь константу A из граничного условия (2.32) и выделив вещественную часть полученного выражения, получаем искомый результат в окончательном виде:

$$H(x, t) = H(x) \cos(\omega t + \varphi(x) - \varphi(h)) \quad (2.33)$$

$$H(x) = \frac{\sqrt{\cos^2(x/\delta) + \operatorname{sh}^2(x/\delta)}}{\sqrt{\cos^2(h/\delta) + \operatorname{sh}^2(h/\delta)}} H_0. \quad (2.34)$$

Задача 9. В условиях предыдущей задачи исследовать предельные случаи сильного ($\delta \ll h$) и слабого ($\delta \gg h$) скин-эффекта. Найти количество теплоты, выделяющееся в объёме плиты в единицу времени.

Решение. В случае сильного скин-эффекта, когда $h \gg \delta$, имеет место экспоненциальное уменьшение амплитуды поля от каждой поверхности плиты вглубь проводника, так что

$$H(x) \approx H_0 e^{-(h-|x|)/\delta}. \quad (2.35)$$

Магнитное поле проникает в тонкий приповерхностный слой с каждой стороны плиты, а в объёме плиты практически равно нулю. Иными словами, скинирование магнитного поля на каждой стороне плиты совершенного не зависит от процессов на противоположной стороне плиты и каждую сторону плиты можно рассматривать как бесконечное полупространство, воспользовавшись решением задачи 5. В частности, чтобы найти мощность диссипации в плите, достаточно просто удвоить результат вычислений по формуле (2.23).

В случае слабого скин-эффекта, когда $|x| \leq h \ll \delta$, правая часть уравнения (2.31) намного меньше его левой части и поэтому в первом приближении может быть заменена нулём, так что

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = 0.$$

Общее решение упрощённого таким образом уравнения имеет

$$H(x) \approx Ax + B.$$

Далее из граничных условий (2.32) находим, что $\mathbb{A} = 0$ и $\mathbb{B} = H_0$, то есть

$$H(x) \approx H_0. \quad (2.36)$$

Этот результат был заранее очевиден: так как глубина скин-слоя фактически предполагается бесконечной, то внешнее поле без заметного ослабления проникает в плиту и поэтому всюду однородно.

Согласно уравнению

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

в однородном магнитном поле $\mathbf{j} = 0$, но это лишь первое приближение. Чтобы найти распределение токов в пределе слабого скин-эффекта, рассмотрим плоский контур в виде прямоугольника со сторонами $2x$ и L вдоль осей x , y соответственно. Предполагая, что контур расположен симметрично относительно центра плиты, найдём ЭДС, которую наводит в контуре переменное магнитное поле. С помощью закона Фарадея находим:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 2i \frac{\omega}{c} L x \mu H_0.$$

Токи Фуко, наводимые этой ЭДС, текут вдоль поверхности плиты (в направлении оси y) перпендикулярно магнитному полю. Из симметрии задачи ясно, что эти токи не могут течь в направлении оси x , так как направления $+x$ и $-x$ равнозначны. Следовательно,

$$j_y = \sigma E_y = \sigma \frac{\mathcal{E}}{2L} = i \frac{\sigma \omega}{c} \mu H_0 x = i \frac{c H_0}{2\pi} \frac{x}{\delta^2}.$$

Мнимый множитель i здесь означает наличие сдвига фазы тока на $\pi/2$ относительно фазы внешнего магнитного поля, так как $i = e^{i\pi/2}$.

Наконец, определим количество тепла Q , выделяемое этим током в среднем за единицу времени. Так как плита не ограничена в направлениях y и z , имеет смысл погонное значение Q в расчёте на единицу площади плиты, то есть мощность, которая выделяется в параллелепипеде высотой $2h$ и основанием в плоскости yz площадью 1 см^2 :

$$Q = \frac{1}{2\sigma} \int_{-h}^h |j_y|^2 dx = \frac{c^2 H_0^2}{4\pi^2 \sigma \delta^4} \int_0^h x^2 dx = \frac{c^2 H_0^2}{12\pi^2 \sigma \delta} \left(\frac{h}{\delta}\right)^3.$$

Сравнение точного решения (2.33) и решений, полученных в приближении сильного (2.35) и слабого (2.36) скин-эффекта показано на рисунке 2.2.

В заключение этой главы рассмотрим «гастрономическую» задачу.

Задача 10. В микроволновой печи, работающей на частоте ω , при приготовлении бисквитного торта с мороженым в качестве начинки необходимо, чтобы количество тепла, поглощённого в бисквите, существенно превышало (в

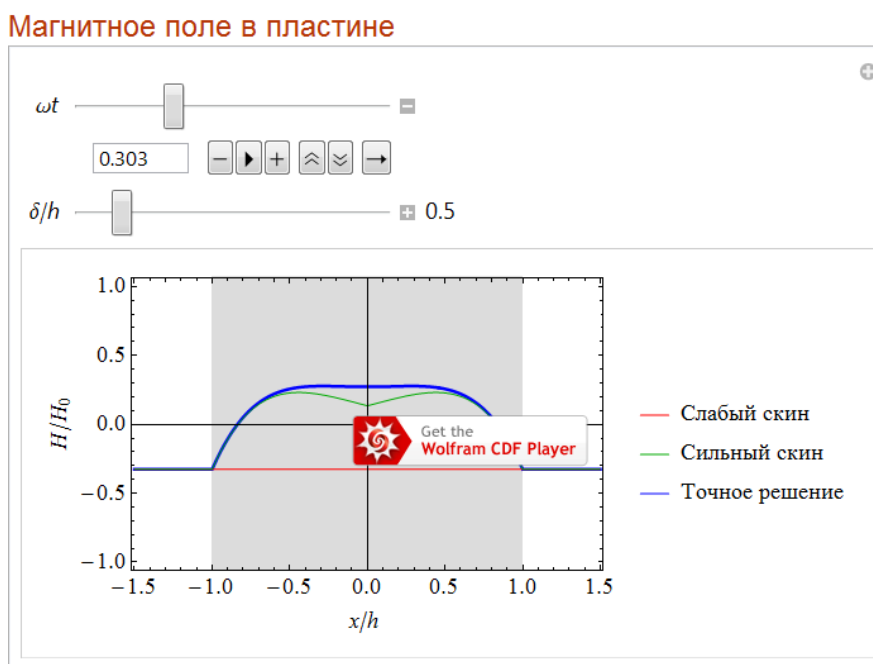


Рис. 2.2: Сравнение точного решения с приближёнными. Запустите интерактивную демонстрацию **в собственном окне** или **в окне веб-браузера**.

$K \gg 1$ раз) количество тепла, поглощённого в начинке. Какова должна быть толщина h бисквита, если его проводимость σ_1 такова, что для бисквита скин-эффект слабый, а в толще мороженого (проводимость σ_2) скин-эффект сильный?

Решение. Совершенно ясно, почему для бисквита скин-эффект должен быть слабым, а для мороженого — сильным. Иначе бисквит не будет пропечён равномерно, а мороженое растает. Однако условие задачи — просто шутка, которой ещё нужно придать разумное физическое толкование. Очевидно, что речь может идти о нагреве полупространства с проводимостью σ_2 , которое отделено от гармонически меняющегося параллельного поверхности полупространства магнитного поля $\mathbf{H}_0 e^{-\omega t}$ слоем другого вещества с проводимостью σ_1 и толщиной h . Пусть задано требуемое отношение $K \gg 1$ теплоты, выделившейся в поверхностном слое, к теплоте, выделившейся в полупространстве. Найдём величину h , предполагая, что в поверхностном слое реализуется случай слабого скин-эффекта, а в остальном полупространстве — случай сильного скин-эффекта.

Введём декартову систему координат с осью x , направленной от внешней границы поверхностного слоя вглубь полупространства. Направим ось z вдоль внешнего переменного магнитного поля \mathbf{H}_0 . Тогда и во всем пространстве магнитное поле

имеет только z -компоненту и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}$$

в двух смежных областях с разной проводимостью $\sigma = \sigma_{1,2}$. Предполагая, что в области $0 < x < h$ с проводимостью σ_1 скин-эффект слабый, ищем там решение в виде

$$H_{z1}(x) = H_0 + \Delta H x/h, \quad (2.37)$$

аналогично тому, как это сделано в задаче 8 для случая слабого скин-эффекта. Напротив, в области $x > h$ по условию задачи скин-эффект является сильным, поэтому там

$$H_{z2}(x) = H_{02} \exp(-k_2(x-h)), \quad (2.38)$$

где $k_2 = (1-i)/\delta_2$ и $\delta_2 = c/\sqrt{2\pi\sigma_2\omega}$. Константы в уравнениях (2.37) и (2.38) выбраны так, что граничные условия при $x = 0$ и $x \rightarrow \infty$ уже выполнены, а неизвестные величины ΔH и H_{02} нужно выразить через H_0 с помощью граничных условий при $x = h$. Одно из их условий следует из непрерывности тангенциальной компоненты магнитного поля H_z :

$$H_{z1}(h) = H_{z2}(h). \quad (2.39)$$

Другое условие получается из непрерывности тангенциальной компоненты электрического поля E_y . Она выражается через производную $H'_z(x) \equiv \partial H_z/\partial x$ из уравнения

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E}. \quad (2.40)$$

Это второе условие имеет вид

$$\frac{H'_{z1}(h)}{\sigma_1} = \frac{H'_{z2}(h)}{\sigma_2}. \quad (2.41)$$

В результате простых вычислений из уравнений (2.39) и (2.41) находим:

$$H_{02} = \frac{H_0}{1 + k_2 h \sigma_1 / \sigma_2},$$

$$\Delta H = -(k_2 h \sigma_1 / \sigma_2) H_{02}.$$

Далее с помощью уравнения (2.40) находим плотность тока в слое с проводимостью σ_1 :

$$j_{y1} = \frac{c H_{02} k_2 \sigma_1}{4\pi \sigma_2}.$$

Поскольку она не зависит от координат, мощность выделения тепла в этом слое находим простым умножением средней удельной мощности $|j_{y1}|^2/2\sigma_1$ на толщину слоя h :

$$Q_1 = \frac{c^2 h \sigma_1 |H_{02}|^2}{16\pi^2 \sigma_2^2 \delta_2^2}.$$

Чтобы найти мощность, которая выделяется в полупространстве с проводимостью σ_2 , можно воспользоваться результатом решения задачи 5, приняв во внимание, что на границе этого полупространства амплитуда поля равна H_{02} . Следовательно,

$$Q_2 = \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma_2}} \frac{c|H_{02}|^2}{8\pi}.$$

Составляя отношение $K = Q_1/Q_2$, находим:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{2h}{\delta_1} \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}} = \frac{2h}{\delta_2} \frac{\sigma_1}{\sigma_2}.$$

Так как по условию задачи $h \ll \delta_1$, отсюда следует, что

$$K \ll 2\sqrt{\sigma_1/\sigma_2}.$$

Последнее неравенство совместимо с предположением $K \gg 1$, только если $\sigma_1 \gg \sigma_2$. Поскольку проводимости бисквита и мороженого скорее всего примерно одного порядка величины, приготовление изысканного торта с мороженым в микроволновой печи так и останется всего лишь шуткой.

2. Скин-эффект в цилиндре

Перейдем к изучению скин-эффекта в цилиндрической геометрии. В качестве первого примера вычислим сопротивление и индуктивность круглого провода.

Задача 11. Вычислить омическое сопротивление круглого провода.

Решение. Запишем уравнение (1.22) в цилиндрической системе координат (r, α, z) . Учитывая симметрию задачи, будем считать, что вектор плотности тока \mathbf{j} имеет только компоненту j_z вдоль оси цилиндрического провода. Тогда для гармонической зависимости тока от времени, $j_z = j(r) e^{-i\omega t}$, причём вследствие симметрии задачи амплитуда тока $j_z(r)$ зависит только от радиуса r , который отсчитывается от оси симметрии провода. Функция $j(r)$ подчиняется уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial j}{\partial r} = -\frac{2i}{\delta^2} j. \quad (2.42)$$

Его общее решения имеет вид

$$j = \mathbb{A} J_0(\xi) + \mathbb{B} Y_0(\xi), \quad (2.43)$$

где $\xi = (1 + i) r / \delta$, а $J_0(\xi)$ и $Y_0(\xi)$ — функции Бесселя. Заметим, что решение уравнения (2.42) можно записать также через другие функции Бесселя $I_0(\zeta)$ и $K_0(\zeta)$, где $\zeta = (1 - i) r / \delta$:

$$j = \mathbb{A} I_0(\zeta) + \mathbb{B} K_0(\zeta). \quad (2.44)$$

Коэффициенты \mathbb{B} следует принять равными нулю, так как $Y_0(\xi) \rightarrow \infty$ при $\xi \rightarrow 0$ и $K_0(\zeta) \rightarrow \infty$ при $\zeta \rightarrow 0$. В данной задаче мы воспользуемся представлением решения в форме (2.43), но в некоторых других задачах, которые будут решены далее, более удобных оказывается форма (2.44).

Выберем коэффициент \mathbb{A} в (2.43) так, чтобы величина

$$J = \int_0^a 2\pi r j_z dr \quad (2.45)$$

имела смысл амплитуды полного тока через сечение провода радиуса a . Интеграл (2.45) вычисляется просто, если учесть, что

$$\frac{d}{d\xi} (\xi^m J_m(\xi)) = \xi^m J_{m-1}(\xi).$$

Вводя обозначение $\xi_a = (1 - i) a / \delta$, имеем

$$j_z = \frac{1 + i}{2\pi a \delta} \frac{J_0(\xi)}{J_1(\xi_a)} J. \quad (2.46)$$

Сопротивление круглого провода R на единицу длины найдём, приравняв $RJ^2/2$ и количество джоулева тепла, выделяющегося в единице длины провода за единицу времени. Обозначая угловыми скобками среднее значение по периоду изменения тока, имеем

$$\frac{1}{2} RJ^2 = \int_0^a \frac{\langle j_z^2 \rangle}{\sigma} 2\pi r dr. \quad (2.47)$$

Перед вычислением среднего значения в формуле (2.46) следует перейти к вещественным величинам. Тогда

$$j_z = \frac{1}{2} \left[\frac{1 + i}{2\pi a \delta} \frac{J_0(\xi)}{J_1(\xi_a)} e^{-i\omega t} + \frac{1 - i}{2\pi a \delta} \frac{J_0(\xi^*)}{J_1(\xi_a^*)} e^{+i\omega t} \right] J,$$

где * обозначает комплексное сопряжение. После возведения j_z в квадрат получаем два сорта слагаемых. Одни осциллируют с удвоенной частотой (так как содержат

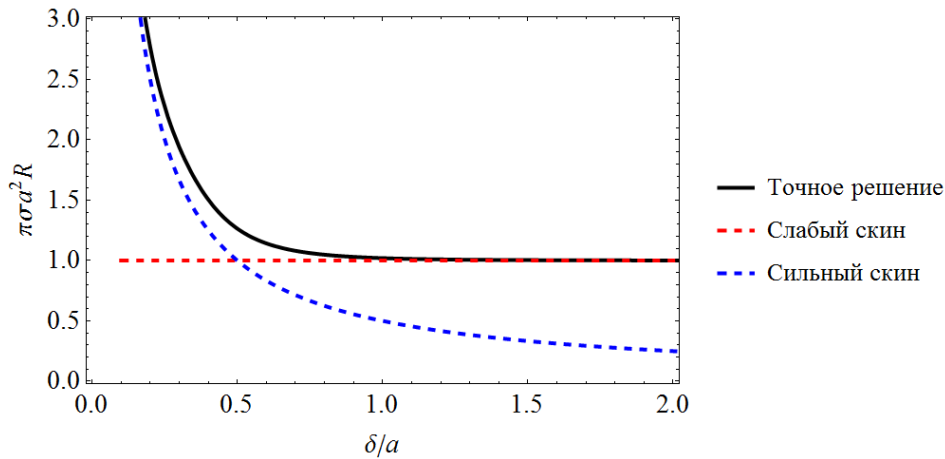


Рис. 2.3: Сравнение точного решения с приближёнными.

множители $e^{-2i\omega t}$ или $e^{-2i\omega t}$). При усреднении по времени они дают ноль. Другие слагаемые не зависят от времени, поэтому результат усреднения имеет вид

$$\langle j_z^2 \rangle = \frac{1}{2} \left[\frac{1+i}{2\pi a \delta} \frac{J_0(\xi)}{J_1(\xi_a)} \right] \left[\frac{1-i}{2\pi a \delta} \frac{J_0(\xi^*)}{J_1(\xi_a^*)} \right] J^2.$$

Подставив последнее выражение в (2.47) и вычислив интеграл, получаем искомое выражение для омического сопротивления круглого провода:

$$R = \frac{1}{4\pi\sigma a \delta} \left[(1+i) \frac{J_0(\xi_a)}{J_1(\xi_a)} + (1-i) \frac{J_0(\xi_a^*)}{J_1(\xi_a^*)} \right]. \quad (2.48)$$

В пределе $\delta \gg a$ это выражение переходит в известную формулу $R = 1/\pi\sigma a^2$. Если же $\delta \ll a$, то $R = 1/2\pi\sigma a \delta$. Как видно из рисунка 2.3, сопротивление круглого цилиндра зависит от толщины скин-слоя δ/a , но в широком диапазоне величин можно пользоваться приближенными решениями.

Задача 12. Вычислить индуктивность круглого провода.

Решение. В отличие от сопротивления самоиндукция проводника уменьшается по мере увеличения частоты тока. Действительно, самоиндукция проводника, согласно определению, пропорциональна энергии магнитного поля тока, циркулирующего по этому проводнику. С другой стороны, известно, что если ток сосредоточен, например, на поверхности цилиндрического проводника, то магнитное поле внутри проводника равно нулю; поле же вне цилиндра от распределения тока по его сечению не зависит (поскольку распределение это сохраняет аксиальную симметрию). Следовательно, по мере концентрации тока на поверхности проводника уменьшается энергия его поля, а стало быть, и самоиндукция проводника, причём последняя стремится к пределу L_{out} , равному внешней самоиндукции проводника. К тому

же выводу можно прийти, приняв во внимание, что магнитное поле в проводниках определяется дифференциальным уравнением того же вида, как и электрическое поле, и что, стало быть, как электрическое, так и магнитное поле быстропеременных токов вглубь проводников не проникает.

Внутреннюю часть индуктивности L_{in} , связанную с магнитным полем внутри круглого проводника, вычислим, приравняв $L_{in}\langle J^2 \rangle / 2c^2 = L_{in}J^2 / 4c^2$ к энергии магнитного поля внутри провода. Используя решение предыдущей задачи, сначала найдём магнитное поле внутри проводника. В любой точке провода оно направлено по азимуту и равно

$$B_\alpha = \frac{2}{cr} \int_0^r 2\pi r j_z dr = \frac{2J}{ca} \frac{J_1(\xi)}{J_1(\xi_a)}.$$

Обозначая угловыми скобками среднее значение по периоду изменения тока, имеем

$$\frac{1}{4c^2} L_{in} J^2 = \int_0^a \frac{\langle B_\alpha^2 \rangle}{8\pi} 2\pi r dr. \quad (2.49)$$

Перед вычислением среднего значения в формуле (2.49) следует перейти к вещественным величинам. Тогда

$$B_\alpha = \frac{J}{ca} \left[\frac{J_1(\xi)}{J_1(\xi_a)} e^{-i\omega t} + \frac{J_1(\xi^*)}{J_1(\xi_a^*)} e^{+i\omega t} \right],$$

где * обозначает комплексное сопряжение. После возведения B_α в квадрат и усреднения по времени получаем

$$\langle B_\alpha^2 \rangle = \frac{2J^2}{c^2 a^2} \left[\frac{J_1(\xi)}{J_1(\xi_a)} \right] \left[\frac{J_1(\xi^*)}{J_1(\xi_a^*)} \right].$$

Подставив последнее выражение в (2.49) и вычислив интеграл, получаем искомое выражение для внутренней части индуктивности круглого провода:

$$L = -\frac{\delta}{2a} \left[(1-i) \frac{J_0(\xi_a)}{J_1(\xi_a)} + (1+i) \frac{J_0(\xi_a^*)}{J_1(\xi_a^*)} \right]. \quad (2.50)$$

В пределе $\delta \gg a$ это выражение переходит в известную формулу $L_{in} = 1/2$. Если же $\delta \ll a$, то $L_{in} = \delta/a$. Внешняя часть индуктивности L_{out} обычно значительно больше, чем L_{in} .

Задача 13. Бесконечный проводящий цилиндр помещён в переменное однородное магнитное поле $\mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}$, направленное вдоль его оси. Найти магнитное поле в цилиндре.

Решение. Пусть магнитное поле направлено вдоль оси z , которая совпадает с осью круглого цилиндра. Вследствие симметрии задачи направление магнитного поля не

меняется и лишь его величина зависит от радиальной координаты r , которая отсчитывается от оси цилиндра, так что

$$H_z = H(r) e^{-i\omega t}.$$

В цилиндрических координатах (r, α, z) уравнение (1.17), записанное для функции $H(r)$, принимает следующий вид:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} H = -\frac{2i}{\delta^2} H. \quad (2.51)$$

Вне проводника формально $\delta \rightarrow \infty$ и вместо (2.51) следует использовать уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} H = 0. \quad (2.52)$$

Рассмотрим полый проводящий цилиндр с внутренним радиусом a и внешним радиусом $b > a$. Снаружи проводника при $r > b$ в соответствии с уравнением (2.52) магнитное поле имеет заданную амплитуду

$$H(r) = H_0. \quad (2.53)$$

Во внутренней полости при $r < a$ магнитное поле также однородно, но его величина пока не известна:

$$H(r) = H_{\text{in}}. \quad (2.54)$$

Наконец, в проводнике при $a < r < b$ решение уравнения (2.51) выражается через функции Бесселя аналогично тому, как это сделано в задаче 11:

$$H(\zeta) = \mathbb{A} I_0(\zeta) + \mathbb{B} K_0(\zeta), \quad (2.55)$$

где $\zeta = (1 - i) r / \delta$, а коэффициенты \mathbb{A} и \mathbb{B} нам предстоит найти с помощью граничных условий.

Одна пара граничных условий получается из требования непрерывности H_z на внутренней и внешней поверхности проводника. Вводя обозначения $\zeta_a = (1 - i) a / \delta$ и $\zeta_b = (1 - i) b / \delta$, имеем:

$$H_{\text{in}} = H(\zeta_a), \quad (2.56)$$

$$H_0 = H(\zeta_b). \quad (2.57)$$

Поскольку H_{in} неизвестно, необходимо ещё одно граничное условие. Это условие получаем, приравнявая азимутальное электрическое поле

$$E_\alpha = \frac{i \omega a}{2c} H_{\text{in}} \quad (2.58)$$

на границе внутренней полости при $r = a$ к электрическому полю на той же границе со стороны проводника. Это последнее поле находим из уравнения

$$-\frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{4\pi}{c} \sigma E_\alpha, \quad (2.59)$$

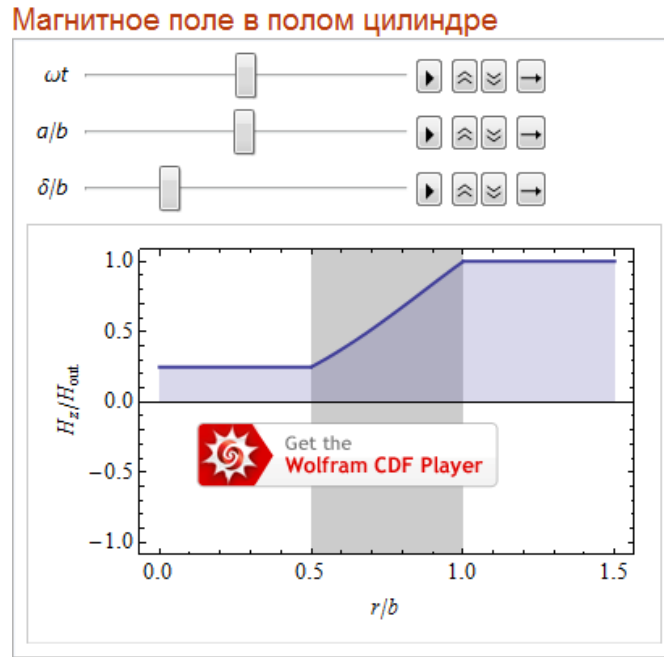


Рис. 2.4: Проникновение продольного магнитного поля в полой цилиндр. Запустите интерактивную демонстрацию **в собственном окне** или **в окне веб-браузера**.

которое представляет собой z -компоненту уравнения $\text{rot } \mathbf{H} = (4\pi/c)\mathbf{j}$. Комбинируя (2.58) и (2.59), искомое третье условие можно записать в виде

$$H'_z(\zeta_a) = \frac{\zeta_a}{2} H_z(\zeta_a), \tag{2.60}$$

где штрих обозначает производную по ζ .

Из уравнений (2.56), (2.57) и (2.60) с помощью формул

$$\begin{aligned} I'_0(\zeta) &= \frac{\zeta}{2} (I_0(\zeta) - I_2(\zeta)), \\ K'_0(\zeta) &= \frac{\zeta}{2} (K_0(\zeta) - K_2(\zeta)) \end{aligned}$$

находим магнитное поле в проводнике

$$H_z = H_0 \frac{K_2(\zeta_a) I_0(\zeta) - I_2(\zeta_a) K_0(\zeta)}{K_2(\zeta_a) I_0(\zeta_b) - I_2(\zeta_a) K_0(\zeta_b)} \tag{2.61}$$

и во внутренней полости проводящего цилиндра

$$H_{in} = \frac{2H_0}{\zeta_a^2} \left[K_2(\zeta_a) I_0(\zeta_b) - I_2(\zeta_a) K_0(\zeta_b) \right]^{-1}. \tag{2.62}$$

В наглядном виде решение представлено на рис. 2.4.

Задача 14. В условиях предыдущей задачи найти мощность тепловыделения на единицу длины цилиндра при сильном и слабом скин-эффектах.

Решение. Как показано в разделе 5, в скиновом приближении магнитное поле и плотность тока удовлетворяют совершенно одинаковым уравнениям. Если в задаче 11 ток был направлен вдоль оси цилиндра, то теперь вдоль оси цилиндра направлено магнитное поле. Учитывая опыт решения задачи 11, ищем магнитное поле внутри проводящего цилиндра в виде

$$H_z(r, t) = H(r) e^{-i\omega t},$$

где функция $H(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} H = -\frac{2i}{\delta^2} H, \quad (2.63)$$

которое с точностью до переобозначения $j \rightarrow H$ совпадает с уравнением (2.42). Очевидно поэтому, что и решение уравнения (2.63) может быть получено тем же способом, которых использован в задаче 11. Это решение найдено в задаче 13, где рассмотрен даже более общий случай проникновения магнитного поля в проводящий полый цилиндр. Вместо того, чтобы исследовать это общее решение в предельных случаях слабого ($a \ll \delta$) и сильного ($a \gg \delta$) скин-эффекта, покажем, как получить приближённые решения непосредственно из уравнения (2.63).

В случае слабого скин-эффекта магнитное поле практически не ослабляется внутри проводящего цилиндра, поэтому

$$H(r) \approx H_0.$$

Чтобы найти мощность диссипации энергии в проводе в этом случае, повторим последовательность рассуждений из задачи 9.

Рассмотрим контур в виде окружности радиуса r с центром на оси цилиндра в плоскости $z = \text{const}$. Изменение магнитного потока через этот контур создаёт ЭДС электромагнитной индукции

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{i\omega\mu\pi r^2}{c} H_0,$$

которая наводит вихревое азимутальное электрическое поле

$$E_\alpha = \frac{\mathcal{E}}{2\pi r}.$$

В свою очередь это поле вызывает ток

$$j_\alpha = \sigma E_\alpha = H_0 \frac{i\sigma\mu\omega}{2c} r = i \frac{cH_0}{4\pi} \frac{r}{\delta^2}.$$

Зная величину тока, нетрудно вычислить среднее за период изменения внешнего магнитного поля количество тепла в расчёте на единицу длины цилиндра:

$$Q = \frac{1}{2\sigma} \int_0^a |j_\alpha| 2\pi r dr = \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{cH_0}{4\pi\delta^2} \right)^2 2\pi \int_0^a r^3 dr = \frac{c^2 H_0^2}{64\pi\sigma} \left(\frac{a}{\delta} \right)^4.$$

В противоположном случае сильного скин-эффекта, $a \gg \delta$, внешнее поле проникает только в тонкую (по сравнению с радиусом цилиндра) шкурку вблизи поверхности цилиндра. Вблизи неё первой производной в правой части уравнения

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{2i}{\delta^2} H,$$

которое эквивалентно уравнению (2.63), можно пренебречь по сравнению со второй производной. Тогда это уравнение принимает «плоский» вид:

$$H'' = -\frac{2i}{\delta^2} H.$$

Его общее решение содержит две константы интегрирования:

$$H(r) = \mathbb{A} e^{kr} + \mathbb{B} e^{-kr},$$

где $k = (1 - i)/\delta$. Константу \mathbb{B} следует взять равной нулю, так как поле должно убывать при $r \rightarrow 0$, то есть вглубь цилиндра, тогда как вторая экспонента e^{kr} соответствует нарастанию поля к периферии цилиндра.

С учётом граничного условия

$$H(a) = H_0,$$

находим константу \mathbb{A} , так что

$$H(r) = H_0 \exp(-k(a - r)). \quad (2.64)$$

Найденное решение описывает проникновение переменного магнитного поля через плоскую границу бесконечного полупространства, занятого проводником. Аналогия становится полной, если в выражении (2.64) ввести координату $x = a - r$, отсчитываемую от поверхности цилиндра вглубь проводника. Поэтому, чтобы вычислить мощность, поглощаемую на единицу длины цилиндра, проще всего воспользоваться решением задачи 5, умножив выражение (2.23) на длину окружности цилиндра $2\pi a$:

$$Q = 2\pi a \sqrt{\frac{\omega\mu}{8\pi\sigma}} \frac{cH_0^2}{8\pi} = \frac{c^2 H_0^2}{16\pi\sigma} \frac{a}{\delta}. \quad (2.65)$$

Полезно обратить внимание, что зависимости Q от параметров задачи (радиуса цилиндра a , частоты поля ω и свойств проводника) качественно совершенно различны в пределе слабого и сильного скин-эффекта.

Задача 15. Исследовать проникновение в проводящий цилиндр магнитного поля, которое перпендикулярно оси цилиндра.

Решение. Вновь рассмотрим круглый цилиндр с внутренним радиусом a и внешним радиусом $b > a$. Ключом к решению задачи является важное наблюдение, что во внутренней полости экрана, магнитное поле \mathbf{H}_{in} однородно. Неоднородная часть внутреннего поля $\delta\mathbf{H}_{\text{in}}$ мала по сравнению с однородной частью \mathbf{H}_{in} по параметру $a^2/\lambda^2 \ll 1$, где $\lambda = c/\omega$ — длина волны.

Введём цилиндрическую систему координат (r, α, z) с осью z вдоль оси цилиндра и будем искать решение в виде

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A}, \quad (2.66)$$

где \mathbf{A} обозначает векторный потенциал. Что касается скалярного потенциала φ , то будем считать, что он равен нулю. Это всегда можно сделать, так как потенциалы \mathbf{A} и φ определены с точностью до калибровочного преобразования

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi, \quad \varphi \rightarrow \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial\chi}{\partial t},$$

включающего произвольную функцию координат в времени χ , которое оставляет неизменными поля

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi.$$

Подставив $\mathbf{E} = -(1/c)\partial\mathbf{A}/\partial t$ в уравнение (1.21) и «сняв»⁴ одну производную по t , получим

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (2.67)$$

Будем считать, что \mathbf{A} имеет только z -компоненту, причём

$$A_z = A(r, \alpha) e^{-i\omega t}.$$

Тогда для функции $A(r, \alpha)$ приходим к уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} A + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} A = -\frac{2i}{\delta^2} A. \quad (2.68)$$

Вне проводника его правую часть нужно заменить нулём:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} A + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} A = 0. \quad (2.69)$$

⁴ «Снятие» производной означает, что нужно проинтегрировать обе части уравнения по времени. Результат интегрирования содержит произвольную функцию координат, не зависящую от времени. Поскольку далее мы будем искать решение, имеющее гармоническую зависимость от времени, эту произвольную функцию можно с самого начала считать равной нулю.

Во внутренней полости $r < a$ подходящее решение уравнения (2.69) имеет вид

$$A = r H_{\text{in}} \sin \alpha . \quad (2.70)$$

В области $a < r < b$ решение уравнения (2.68) ищем в виде

$$A = \left[\mathbb{A} I_1(\xi) + \mathbb{B} K_1(\xi) \right] \sin \alpha , \quad (2.71)$$

где $\xi = (1 - i)r/\delta$. Наконец, при $r > b$

$$A = \left[r H_0 + \frac{m}{r} \right] \sin \alpha . \quad (2.72)$$

Так как

$$E_z = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} = \frac{i\omega}{c} A_z ,$$

из непрерывности E_z при $r = a$ и $r = b$ следует непрерывность функции A при $\xi_a = (1 - i)a/\delta$ и $\xi_b = (1 - i)b/\delta$. Непрерывность A гарантирует также непрерывность радиальной компоненты индукции магнитного поля

$$B_r = \mu H_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} .$$

Наконец, из непрерывности азимутальной компоненты напряжённости магнитного поля

$$H_\alpha = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial r}$$

следует непрерывность комбинации $(\partial A_z(\xi)/\partial r)/\mu$ при $\xi = \xi_a$ и $\xi = \xi_b$. Комбинируя выражения (2.70), (2.71) и (2.72) с граничными условиями

$$\{A_z\} = 0, \quad \left\{ \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial r} \right\} = 0, \quad (2.73)$$

можно найти константы H_i , \mathbb{A} , \mathbb{B} и m . Найденные таким образом выражения оказываются весьма громоздкими. Более обозримый результат получается для немагнитного проводника с $\mu = 1$. Тогда

$$A = \frac{2\delta H_0}{1 - i} \frac{K_2(\xi_a) I_1(\xi) + I_2(\xi_a) K_1(\xi)}{K_2(\xi_a) I_0(\xi_b) - I_2(\xi_a) K_0(\xi_b)} \quad (2.74)$$

в интервале $a < r < b$. Магнитное поле во внутренней полости равно

$$H_{\text{in}} = \frac{2H_0}{\xi_a^2} [K_2(\xi_a) I_0(\xi_b) - I_2(\xi_a) K_0(\xi_b)]^{-1} , \quad (2.75)$$

а коэффициент m в (2.72) равен

$$m = -H_0 b^2 \frac{K_2(\xi_a) I_2(\xi_b) - I_2(\xi_a) K_2(\xi_b)}{K_2(\xi_a) I_0(\xi_b) - I_2(\xi_a) K_0(\xi_b)} . \quad (2.76)$$

Магнитное поле в полой цилиндрической трубе ⊥ оси

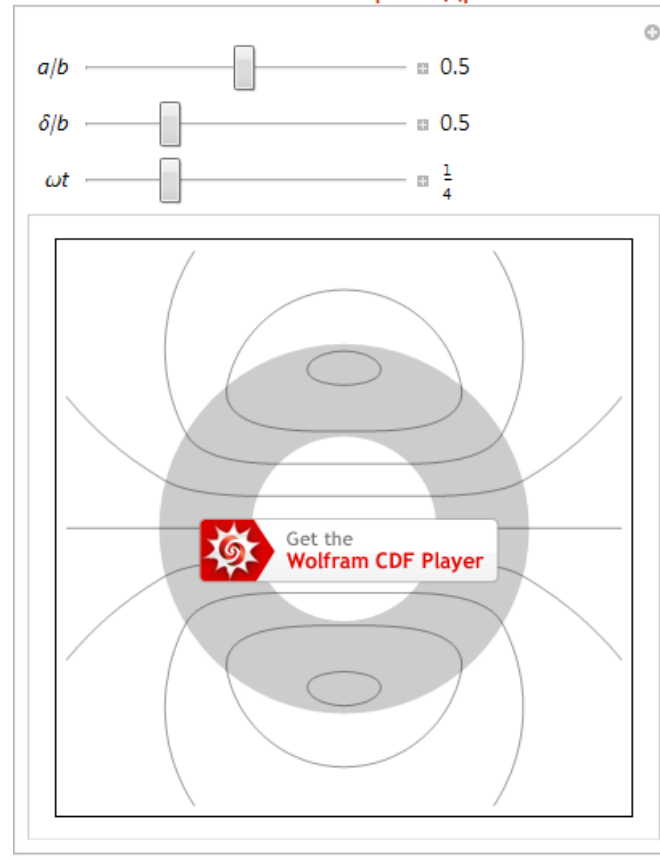


Рис. 2.5: Проникновение поперечного магнитного поля в полый цилиндр. Запустить интерактивную демонстрацию **в собственном окне** или **в окне веб-браузера**.

Интересно, что формулы (2.62) и (2.75) в точности совпадают.

Приведём ещё формулы для проекций магнитного поля. Во внутренней полости при $a < r$:

$$\begin{aligned} H_r &= H_{in} \cos \alpha \\ H_\alpha &= -H_{in} \sin \alpha . \end{aligned}$$

В стенке проводящего цилиндра при $a < r < b$:

$$\begin{aligned} H_r &= \frac{2H_0}{\xi} \frac{K_2(\xi_a) I_1(\xi) + I_2(\xi_a) K_1(\xi)}{K_2(\xi_a) I_0(\xi_b) - I_2(\xi_a) K_0(\xi_b)} \cos \alpha \\ H_\alpha &= -2H_0 \frac{K_2(\xi_a) I_1'(\xi) + I_2(\xi_a) K_1'(\xi)}{K_2(\xi_a) I_0(\xi_b) - I_2(\xi_a) K_0(\xi_b)} \sin \alpha . \end{aligned}$$

Вне цилиндра при $b < r$:

$$H_r = \left[H_0 + \frac{m}{r^2} \right] \cos \alpha$$

$$H_\alpha = \left[-H_0 + \frac{m}{r^2} \right] \sin \alpha .$$

В наглядном виде решение представлено на рис. 2.5.

Задача 16. Используя формулу (2.75), доказать, что внутри тонкостенного цилиндра

$$H_{\text{in}} = H_0 / (1 - iah/\delta^2),$$

если $h = b - a \ll \delta$.

Задача 17. Бесконечный цилиндр радиуса a с проводимостью σ и магнитной проницаемостью μ помещён в однородное магнитное поле $\mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}$, перпендикулярное его оси. Найти количество тепла, выделившегося на единицу длины цилиндра в пределе слабого ($a \ll \delta$) и сильного ($a \gg \delta$) скин-эффекта.

Решение. Вновь используем цилиндрическую систему координат с осью z вдоль оси цилиндра. Как показано в задаче 16 отыскание магнитного поля в проводящем круглом цилиндре, помещённом в магнитное поле, перпендикулярное его оси, сводится к решению уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} A + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} A = -\frac{2i}{\delta^2} A \quad (2.77)$$

для z -компоненты векторного потенциала

$$A_z = A(r, \alpha) e^{-i\omega t} .$$

Вместо того, чтобы исследовать общее решение этого уравнения, найденное в задаче 16, в предельных случаях слабого и сильного скин-эффекта, покажем, как эти предельные случаи получаются непосредственно из уравнения (2.77).

Будем решать указанное уравнение методом разделения переменных. Для этого представим искомое решение в виде произведения двух независимых функций отдельно по переменным r и α .

Одну из этих функций несложно угадать, заметив, что вне цилиндра при $r \rightarrow \infty$ поле должно быть однородным, поскольку возмущение, вносимое цилиндром, ослабевает. Однородное поле $\mathbf{H}_0 = (H_0 \cos \alpha, -H_0 \sin \alpha, 0)$ описывается векторным потенциалом $\mathbf{A} = (0, 0, H_0 r \sin \alpha)$. В связи с этим предположим, что и всюду

$$A(r, \alpha) = \mathcal{A}(r) \sin \alpha . \quad (2.78)$$

Мы увидим, что это предположение оправдывается финальным решением задачи, поскольку не приводит ни к каким противоречиям или невыполнимым граничным условиям.

Подставляя (2.78) в уравнение (2.77), замечаем, что множитель $\sin \alpha$ сокращается. В результате получается обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $\mathcal{A}(r)$:

$$\frac{d^2 \mathcal{A}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\mathcal{A}}{dr} - \frac{1}{r^2} \mathcal{A} = -\frac{2i}{\delta^2} \mathcal{A}. \quad (2.79)$$

Вне цилиндра правая часть этого уравнения обращается в ноль, поэтому там, как нетрудно проверить, его общее решение есть сумма степенных функций $r^{\pm 1}$. Учитывая, что при $r \rightarrow \infty$ функция \mathcal{A} стремится к $H_0 r$, заключаем, что снаружи цилиндра

$$\mathcal{A}_2(r) = H_0 r + \frac{m}{r}, \quad (2.80)$$

где индекс «2» указывает на область $r > a$. Решение \mathcal{A}_1 для области $r < a$ существенно различно для случаев слабого и сильного скин-эффекта.

При слабом скин-эффекте $r \leq a \ll \delta$ правая часть уравнения (2.79) может быть заменена нулём так же, как в рассмотренных ранее других задачах при анализе слабого скин-эффекта. Следовательно,

$$\mathcal{A}_1(r) = \mathbb{A}r + \mathbb{B}/r. \quad (2.81)$$

Ограниченность поля внутри цилиндра означает, что $\mathbb{B} = 0$, а оставшиеся два коэффициента \mathbb{A} и m определяются из условий сшивки функций \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 при $r = a$. Здесь, на поверхности цилиндра, непрерывны тангенциальные компоненты

$$H_\alpha = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial r} \quad (2.82)$$

напряжённости магнитного поля и нормальные компоненты

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \alpha} \quad (2.83)$$

вектора индукции. Отсюда получаем два уравнения:

$$\mathbb{A}a = H_0 a + \frac{m}{a}, \quad \frac{\mathbb{A}}{\mu} = H_0 - \frac{m}{a^2}.$$

Из них находим, что

$$\mathbb{A} = \frac{2\mu}{\mu + 1} H_0, \quad m = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} H_0 a^2.$$

Таким образом,

$$\mathcal{A}_1 = \frac{2\mu}{\mu + 1} H_0 r, \quad \mathcal{A}_2 = H_0 r + \frac{\mu - 1}{\mu + 1} H_0 \frac{a^2}{r}.$$

Смысл полученного результата прост. Внутри цилиндра формируется однородное магнитное поле

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \frac{2\mu}{\mu + 1} \mathbf{H}_0,$$

а снаружи на внешнее однородное поле \mathbf{H}_0 накладывается дипольное магнитное поле цилиндра.⁵ Отметим, что при $\mu = 1$ поле во всем пространстве в этом приближении не меняется и остаётся равным \mathbf{H}_0 .

Для вычисления наведённых токов в пределе слабого скин-эффекта рассмотрим прямоугольный контур, лежащий в плоскости, проходящей через ось цилиндра. Пусть контур расположен симметрично относительно оси цилиндра, плоскость контура образует угол α с направлением внутреннего поля \mathbf{H} , а длина (вдоль оси z) и ширина (в радиальном направлении) контура равны соответственно L и $2r$. Тогда магнитный поток через площадь контура есть

$$\Phi = \frac{2\mu}{\mu + 1} H_0 2rL \sin \alpha.$$

ЭДС

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = i \frac{2\mu}{\mu + 1} \frac{\omega}{c} 2rLH_0 \sin \alpha,$$

создаваемая изменением магнитного потока, вызывает токи Фуко вдоль оси z :

$$j_z = \sigma E_z = \sigma \frac{\mathcal{E}}{2L} = i \frac{2\mu}{\mu + 1} \frac{\sigma \omega}{c} H_0 r \sin \alpha = \frac{i}{\mu + 1} \frac{cH_0}{\pi \delta^2} r \sin \alpha.$$

Зная ток, нетрудно вычислить количество теплоты, которое выделяется в цилиндре. В расчёте на единицу длины цилиндра получаем

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2\sigma} \int |j_z|^2 r dr d\alpha = \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{1}{\mu + 1} \frac{cH_0}{\pi \delta^2} \right)^2 \int_0^a r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha d\alpha = \\ &= \frac{c^2}{8\pi\sigma} \left(\frac{1}{\mu + 1} \right)^2 \left(\frac{a}{\delta} \right)^4 H_0^2. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Перейдем теперь к случаю сильного скин-эффекта. При $r \sim a \gg \delta$ отдельные слагаемые в уравнении (2.79) можно ценить следующим образом: $\mathcal{A}'' \sim \mathcal{A}/\delta$, $\mathcal{A}'/r \sim \mathcal{A}/a\delta$, $\mathcal{A}/r^2 \sim \mathcal{A}/a^2$. Поэтому в левой части уравнения можно пренебречь всеми слагаемыми, кроме первого, после чего это уравнение принимает «плоский» вид:

$$\frac{d^2 \mathcal{A}}{dr^2} = -\frac{2i}{\delta} \mathcal{A}.$$

⁵ Векторный потенциал такого диполя равен $\mathbf{A} = 2 [\mathbf{m} \times \mathbf{r}] / r^2$ [12], где \mathbf{r} — радиус-вектор точки наблюдения, лежащий в плоскости, перпендикулярной моменту \mathbf{m} .

Его общее решение имеет уже привычный нам вид:

$$\mathcal{A}_1 = \mathbb{A} e^{kr} + \mathbb{B} e^{-kr},$$

где $k = (1 - i)/\delta$. В этом решении нужно сохранить только убывающую вглубь проводника экспоненту, приняв $\mathbb{B} = 0$ и сшить его с функцией \mathcal{A}_2 , которая определена уравнением (2.80). Коэффициенты \mathbb{A} и t находим с помощью вышеописанных условий непрерывности величин \mathcal{A} и \mathcal{A}'/μ при $r = a$. В результате получаем

$$\mathcal{A}_1 = \frac{2H_0 a}{ka/\mu + 1} e^{-k(a-r)}, \quad \mathcal{A}_2 = H_0 r - \frac{ka/\mu - 1}{ka/\mu + 1} \frac{H_0 a^2}{r}.$$

Для хороших проводников обычно $\mu \sim 1$, поэтому условие сильного скин-эффекта $a \gg \delta$ практически гарантирует, что $|ka| \gg \mu$. Так или иначе далее предположим, что последнее неравенство выполнено. Тогда

$$\mathcal{A}_1 \approx \frac{2\mu H_0}{k} e^{-k(a-r)}, \quad \mathcal{A}_2 \approx H_0 r - \frac{H_0 a^2}{r}.$$

Найдём ещё компоненты магнитного поля внутри цилиндра. С помощью формул (2.82) и (2.83) получаем:

$$H_r = \frac{1}{\mu r} \mathcal{A}_1 \cos \alpha \approx \frac{2H_0}{ka} e^{-k(a-r)} \cos \alpha,$$

$$H_\alpha = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial r} \sin \alpha = -2H_0 e^{-k(a-r)} \sin \alpha.$$

Так как в рассматриваемом случае сильного скин-эффекта $|ka| \gg 1$, отсюда видно, что почти для любого угла α тангенциальная компонента поля H_α значительно больше нормальной компоненты H_r . В первом приближении вообще можно считать, что на поверхности цилиндра

$$H_r = 0, \quad H_\alpha = -2H_0 \sin \alpha. \quad (2.85)$$

Чтобы вычислить мощность диссипации энергии в скин-слое теперь достаточно воспользоваться решением задачи 5 о скин-эффекте на плоской границе. Используя формулу (2.23), полученную при её решении, нужно учесть, что величина магнитного поля различна на различных участках поверхности цилиндра, заменив H_0 на H_α из формулы (2.85) и выполнив интегрирование по периметру окружности цилиндра:

$$Q = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{\omega\mu}{8\pi\sigma}} \frac{cH_\alpha^2}{8\pi} a d\alpha = \frac{c^2}{8\pi\sigma} \frac{a}{\delta} H_0^2. \quad (2.86)$$

Задача 18. Сравнить количество теплоты, выделяемое в проводящем цилиндре, который в помещён в продольное и поперечное переменное магнитное поле. Рассмотреть случаи слабого и сильного скин-эффекта.

Решение. Используя решения задач 14 и 17, находим, что при слабом скин-эффекте

$$\frac{Q_{\parallel}}{Q_{\perp}} = \frac{(\mu + 1)^2}{8},$$

тогда как при сильном скин-эффекте

$$\frac{Q_{\parallel}}{Q_{\perp}} = \frac{1}{2}.$$

Интересно, что в немагнитном ($\mu = 1$) проводящем цилиндре отношение Q_{\parallel}/Q_{\perp} одинаково в обоих предельных случаях, и для поля, перпендикулярного оси цилиндра, количество тепла вдвое больше, чем в случае продольного поля. Если же $\mu > 1,8$, то при слабом скин-эффекте большее количество тепла выделяется в случае поля, направленного вдоль оси цилиндра, а для сильного скин-эффекта соотношение теплоты по-прежнему в пользу поперечного поля.

3. Скин-эффект в шаре

Задача 19. Шар радиуса a с проводимостью σ находится в однородном магнитном поле $\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}$. Найти результирующее магнитное поле и распределение вихревых токов в шаре для общего случая произвольных частот. Для простоты считать, что $\mu = 1$.

Решение. Вследствие аксиальной симметрии системы задачи вокруг направления внешнего магнитного поля, от которого мы условимся отсчитывать угол θ сферической системы координат (r, θ, α) , распределение вихревых токов в шаре и электрическое поле также обладают аксиальной симметрией. На этом основании можно утверждать, что электрическое поле будет иметь только одну составляющую E_{α} , которая не может зависеть от азимутального угла α вокруг оси симметрии:

$$E_{\alpha} = E(r, \theta) e^{-i\omega t}, \quad E_r = E_{\theta} = 0.$$

Уравнение (1.21), переписанное для функции $E(r, \theta)$, принимает вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial E_{\alpha}}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial E}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} E_{\alpha} = -\frac{2i}{\delta^2} E_{\alpha}.$$

Ищем его решение в виде

$$E_{\alpha}(r, \theta) = E(r) \sin \theta.$$

При этом оказывается, что функция $E(r)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{dE}{dr} - \frac{2}{r^2} E = -\frac{2i}{\delta^2} E. \quad (2.87)$$

которое подстановкой $F(r) = \chi(r)/\sqrt{r}$ сводится к уравнению Бесселя. Его решением, ограниченным при $r = 0$, будет

$$E(r) = \mathbb{A}j_1(kr),$$

где $k = (1 + i)/\delta$, а j_n обозначает сферическую функцию Бесселя, которая в свою очередь выражается через функцию Бесселя полуцелого порядка:

$$j_n(\xi) = \sqrt{\pi/2\xi} J_{n+\frac{1}{2}}(\xi).$$

Как мы убедились при решении задачи 11, при анализе скин-эффекта можно считать, что скалярный потенциал равен нулю, $\varphi = 0$, а поэтому $\mathbf{E} = -(1/c)\partial\mathbf{A}/\partial t = (i\omega/c)\mathbf{A}$. Следовательно, векторный потенциал \mathbf{A} также имеет только азимутальную компоненту $A_\alpha(r, \theta)$, которая также выражается через сферическую функцию Бесселя:

$$A_\alpha(r, \theta) = \mathbb{A}j_1(kr) \sin \theta, \quad (2.88)$$

но, конечно, с другой константой \mathbb{A} . Вне шара уравнение (2.87) нужно решать с нулевой правой частью. Поэтому там

$$A_\alpha(r, \theta) = \left(\frac{r}{2}H_0 + \frac{m}{r^2}\right) \sin \theta. \quad (2.89)$$

Далее для простоты будем считать, что шар не обладает магнитными свойствами, то есть μ . Тогда на его поверхности непрерывны как функция A_α , так и её производная по r (сравни с задачей 11). Это следует из непрерывности компонент магнитного поля

$$H_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\alpha), \quad H_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\alpha). \quad (2.90)$$

Определив таким образом константы \mathbb{A} и m , получаем

$$A_\alpha = \frac{3}{2} \frac{j_1(kr)}{\sin(ka)} a H_0 \sin \theta \quad (2.91)$$

при $r < a$ и

$$A_\alpha = \frac{H_0 r}{2} \left[1 + (3j_1(ka)/\sin(ka) - 1) \frac{a^3}{r^3} \right] \sin \theta \quad (2.92)$$

при $r > a$. Распределение вихревых токов теперь легко найти по формуле

$$j_\alpha = \sigma E_\alpha = \sigma (i\omega/c) A_\alpha.$$

Задача 20. Металлический шар радиуса a с проводимостью σ и магнитной проницаемостью μ помещён в однородное переменное магнитное поле $\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}$. Считая частоту малой, найти в первом исчезающем приближении распределение вихревых токов в шаре и среднюю поглощаемую им мощность Q .

Решение. Как и при решении задачи 19, используем сферическую систему координат (r, α, θ) , ось которой совпадает с направлением внешнего поля. В пределе слабого скин-эффекта при $a \ll \delta$ магнитное поле внутри шара будет приблизительно однородно, так же как в задаче о проникновении магнитного поля в проводящий цилиндр. Поэтому при $r < a$

$$A_\alpha = \frac{r}{2} H_{\text{in}} \sin \theta,$$

тогда как при $r > a$ по-прежнему верна формула (2.89). Константы H_{in} и m находим с помощью формул (2.90), учитывая, что при $r = a$ непрерывны радиальная компонента индукции магнитного поля $B_r = \mu H_r$ и тангенциальная компонента напряжённости H_α . Внутри шара

$$\mathbf{H} = \frac{3}{\mu + 2} \mathbf{H}_0, \quad (2.93)$$

а снаружи на внешнее поле \mathbf{H}_0 накладывается поле магнитного дипольного момента

$$\mathbf{m} = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} a^3 \mathbf{H}_0, \quad (2.94)$$

приобретённого шаром:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \frac{3r(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - r^2 \mathbf{m}}{r^5}. \quad (2.95)$$

Чтобы вычислить вихревой ток внутри шара, рассмотрим произвольный контур в виде окружности радиуса $\rho = r \sin \theta$ с центром на оси шара, лежащей в плоскости, перпендикулярной \mathbf{H}_0 . Магнитный поток через его площадь равен

$$\Phi = \frac{3\mu}{\mu + 2} \pi \rho^2 H_0.$$

Следовательно, ЭДС электромагнитной индукции равна

$$\mathcal{E} = i \frac{\pi \omega \rho^2}{c} \frac{3\mu}{\mu + 2} H_0.$$

Вихревые токи текут по азимуту:

$$j_\alpha = \sigma E_\alpha = \sigma \frac{\mathcal{E}}{2\pi\rho} = i \frac{\sigma \omega r \sin \theta}{2c} \frac{3\mu}{\mu + 2} H_0 = i \frac{3}{\mu + 2} \frac{c H_0}{4\pi} \frac{r \sin \theta}{\delta^2}. \quad (2.96)$$

Мощность тепловыделения в шаре находим так же, как при анализе слабого скин-эффекта в цилиндре (задача 17):

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2\sigma} \int |j_\alpha|^2 dV = \frac{1}{2\sigma} 2\pi \int_0^a dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left(\frac{3}{\mu + 2} \frac{c H_0}{4\pi} \frac{r \sin \theta}{\delta^2} \right)^2 = \\ &= \frac{3c^2 a}{20\pi\sigma} \frac{1}{(\mu + 2)^2} \left(\frac{a}{\delta} \right)^4 H_0^2. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Задача 21. Металлический шар помещён в однородное магнитное поле, меняющееся с частотой ω . Найти результирующее поле \mathbf{H} и среднюю поглощаемую шаром мощность Q при больших частотах. Радиус шара a , магнитная проницаемость μ , проводимость σ .

Решение. В пределе сильного скин-эффекта, при $a \gg \delta$ магнитное поле не проникает внутрь шара за исключением тонкого слоя толщиной δ вблизи его поверхности. Учитывая очевидную аналогию с задачей (17) о сильном скин-эффекте в цилиндре, в первом приближении можно считать, что внутри шара

$$\mathbf{H} = 0,$$

а вне шара по-прежнему верна формула (2.95) из предыдущей задачи. Магнитный момент \mathbf{m} теперь находим из условия обращения в ноль радиальной компоненты поля (2.95) при $r = a$:

$$\mathbf{m} = -\frac{a^3}{2}\mathbf{H}_0. \quad (2.98)$$

Формально он совпадает с величиной магнитного момента (2.94), вычисленного в пределе низких частот, если взять $\mu = 0$.

Что касается тангенциальной компоненты магнитного поля, то она испытывает разрыв на поверхности шара из-за наличия поверхностного тока (то есть того тока, который протекает в тонком поверхностном слое шара). В пределах этого слоя применимо приближение плоской границы и

$$H_\theta = -\frac{3}{2}H_0 \sin \theta e^{-k(a-r)}.$$

Чтобы вычислить мощность выделения тепла в шаре, используем тот же способ, что и при выводе формулы (2.86) в задаче 17. А именно, воспользуемся решением задачи 5 о скин-эффекте на плоской границе. Используя формулу (2.23), полученную при её решении, нужно учесть, что величина магнитного поля различна на различных участках поверхности шара, заменив H_0 на $H_\theta = -(3/2)H_0 \sin \theta$ в формуле (2.85) и выполнив интегрирование по поверхности шара:

$$Q = \int_0^\pi \sqrt{\frac{\omega\mu}{8\pi\sigma}} \frac{cH_\theta^2}{8\pi} 2\pi a^2 \sin \theta d\theta = \frac{3c^2 a^2}{16\pi\sigma\delta} H_0^2. \quad (2.99)$$

Рассмотрим теперь несколько простых задач, решение которых опирается на полученные выше результаты.

Задача 22. Маленькие металлические шарики радиуса a с проводимостью σ и магнитной проницаемостью μ равномерно распределены в вакууме так, что в среднем на единицу объёма приходится n шариков, причём $na^3 \ll 1$. Вся

система помещена в переменное магнитное поле $\mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}$. Во сколько раз изменится количество тепла, выделяющееся в единице объёма в пределе низких и высоких частот, если уменьшить радиус шариков в p раз при сохранении суммарного объёма шариков. Для простоты считать, что уменьшение радиуса не настолько велико, что режим сильного скин-эффекта мог перейти в режим слабого скин-эффекту.

Решение. В случае слабого скин-эффекта $Q \propto a^5$, т.е. тепло, выделяющееся в одном шарике, пропорционально пятой степени его радиуса. Соответственно, в системе шариков выделяемая мощность пропорциональна na^5 . Так как по условию задача $na^3 = \text{const}$, после измельчения шариков в p раз суммарное выделение тепла уменьшится в p^2 раз.

В пределе сильного скин-эффекта $Q \propto a^2$, поэтому суммарное выделение тепла увеличится в p раз.

Задача 23. Два шарика радиуса a с проводимостью σ помещены в переменное магнитное поле $\mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}$. Оценить силу их взаимодействия в случаях слабого и сильного скин-эффекта. Шарика расположены на расстоянии $r \gg a$ друг от друга вдоль линии, перпендикулярной \mathbf{H}_0 .

Решение. Переменное магнитное поле наводит в шарах магнитный момент. Так как $r \gg a$. Величина магнитного момента каждого шара практически не зависит от величины магнитного момента другого шара и поэтому может быть вычислена независимо. Эти вычисления выполнены в задачах 20 и 21.

Энергию взаимодействия двух упругих магнитных диполей

$$U = -\frac{1}{2}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}_m)$$

находим, умножая скалярно магнитный момент \mathbf{m} одного диполя на магнитное поле

$$\mathbf{H}_m = -\frac{\mathbf{m}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}$$

другого диполя:

$$U = \frac{m^2}{2r^3} - \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})^2}{2r^5}.$$

Мгновенная сила, действующая между шарами, равна

$$\mathbf{F} = -\nabla U = \frac{3m^2\mathbf{r}}{2r^5} + \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{m}}{r^5} - \frac{(15\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})^2\mathbf{r}}{2r^7}. \quad (2.100)$$

В случае слабого скин-эффекта, согласно (2.94)

$$\mathbf{m} = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} a^3 \mathbf{H}_0,$$

тогда как в пределе сильного скин-эффекта

$$\mathbf{m} = -\frac{a^3}{2}\mathbf{H}_0$$

в соответствии с (2.98).

Формула (2.100) заметно упрощается при $(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) = 0$, что как раз соответствует условию задачи. Кроме того, нужно учесть, что магнитное поле осциллирует, поэтому имеет смысл говорить о средней за период его изменения величине силы. Усреднение по времени приводит к замене $m^2 \rightarrow |m|^2/2$ (см. Приложение А.1), где $|m|$ есть амплитуда магнитного момента. Следовательно,

$$F = \frac{3|m|^2}{4r^4}. \quad (2.101)$$

Собирая все коэффициенты, находим, что

$$F = +\frac{3}{4} \left(\frac{\mu - 1}{\mu + 2} \right)^2 \frac{H_0^2 a^6}{r^4} \quad (2.102)$$

при слабом скин-эффекте и

$$F = +\frac{3}{16} \frac{H_0^2 a^6}{r^4} \quad (2.103)$$

при сильном скин-эффекте. Знак плюс в выражении для F соответствует отталкиванию шариков.

Найденная сила в указанных пределах низких и высоких частот не зависит от частоты. Согласно (2.102), в пределе низких частот (то есть в случае слабого скин-эффекта) сила F формально обращается в ноль, если проводник не обладает магнитными свойствами и $\mu = 1$. Однако это лишь первое приближение. Магнитный момент (и сила!) не исчезает $\mu = 1$, он лишь становится очень малым. Это следует из решения задачи 19, где найдено точное решение при произвольной частоте для немагнитного проводящего шара. Из сравнения формул (2.89) и (2.92), нетрудно видеть, что

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} [3j_1(ka)/\sin(ka) - 1] a^3 \mathbf{H}_0.$$

Отсюда следует, что при $k = (1 + i)/\delta \rightarrow 0$

$$\mathbf{m} = \frac{i}{15} \frac{a^2}{\delta^2} a^3 \mathbf{H}_0. \quad (2.104)$$

Покажем, как получить формулу (2.104), не прибегая к разложению точного решения. Переходя к пределу $\mu = 1$ в формуле (2.96), находим плотность тока в немагнитном проводящем шаре в случае слабого скин-эффекта:

$$j_\alpha = i \frac{cH_0}{4\pi} \frac{r}{\delta^2} \sin \theta.$$

Рассмотрим кольцевой ток $dI = j_\alpha dS$ радиуса $\rho = r \sin \theta$, который пересекает маленькую площадку с сечением $dS = dr \times r d\theta$ в плоскости, проходящей через диаметр шара в направлении внешнего магнитного поля. Соответствующий ему магнитный момент равен

$$dm = \frac{\pi \rho^2 dI}{2c}.$$

Выполнив интегрирование

$$m = \int_0^a dr \int_0^\pi r d\theta \frac{\pi (r \sin \theta)^2}{2c} \left(\frac{icH_0}{4\pi\delta^2} r \sin \theta \right),$$

вновь получим формулу (2.104). Её подставка в (2.101) даёт силу притяжения немагнитных проводящих шариков в пределе слабого скин-эффекта

$$F = + \frac{1}{150} \left(\frac{a}{\delta} \right)^4 \frac{H_0^2 a^6}{r^4}.$$

Задача 24. Найти магнитную проницаемость $\bar{\mu}$ среды, представляющей собой «газ» металлических шариков радиуса a с плотностью n такой, что $na^3 \ll 1$. Проводимость металла σ , магнитная проницаемость μ . Рассмотреть случаи малых и больших частот ω внешнего поля H_0 .

Решение. Малые и большие частоты внешнего поля соответствуют пределам слабого и сильного скин-эффекта поля в каждом из шариков, а условие $na^3 \ll 1$ означает, что магнитное поле, действующее на каждый шар приблизительно равно H_0 и взаимное влияние шариков мало. Другими словами, магнитный момент единицы объёма такой среды равен сумме магнитных моментов отдельных шариков в этом объёме:

$$M = nm.$$

Так как с одной стороны

$$B = \bar{\mu}H$$

и

$$B = H + 4\pi M,$$

получаем уравнение для определения эффективной магнитной проницаемости $\bar{\mu}$ такой среды:

$$\bar{\mu}H = H + 4\pi M.$$

В случае слабого слабого скин-эффекта

$$\mathbf{m} = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} a^3 \mathbf{H}_0 \approx \frac{\mu - 1}{\mu + 2} a^3 \mathbf{H}.$$

Тогда

$$\bar{\mu} = 1 + 4\pi \frac{\mu - 1}{\mu + 2} a^3 n,$$

если шарики сделаны из магнитного материала с магнитной проницаемостью μ . Если же $\mu = 1$, то, как показано в предыдущей задаче, магнитный момент следует вычислять по формуле (2.104). Тогда эффективная магнитная проницаемость оказывается комплексной:

$$\bar{\mu} = 1 + i \frac{4\pi}{15} \left(\frac{a}{\delta}\right)^2 a^3 n.$$

В случае сильного скин-эффекта

$$\mathbf{m} = -\frac{a^3}{2} \mathbf{H}_0 \approx -\frac{a^3}{2} \mathbf{H}$$

и

$$\bar{\mu} = 1 - 2\pi a^3 n$$

не зависит от частоты внешнего поля.

Задача 25. («Гроб Магомета»). По кольцу радиуса $R = 1$ см, расположенному в горизонтальной плоскости, протекает переменный ток $I = I_0 \cos(\omega t)$. Над кольцом на его оси на высоте $z = 10R$ свободно висит маленький медный шарик радиуса $a \ll R$. Найти амплитуду I_0 тока в кольце, если $\omega \gg c^2/\sigma a^2$. Плотность меди $\rho \approx 9$ г см⁻³, её проводимость $\sigma = 5 \cdot 10^{17}$ с⁻¹.

Решение. Условие $\omega \gg c^2/\sigma a^2$ означает, что глубина скин-слоя мала и скин-эффект является сильным, то есть $\delta \ll a$. Так как $z \gg R$, а шарик маленький, будем считать, что магнитное поле кольца с током в месте расположения шарика почти однородно и равно полю магнитного момента $m = (1/c)\pi R^2 I$ кольца с током

$$\mathbf{H} = -\frac{\mathbf{m}}{h^3} + \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}}{z^3} = \frac{2\pi R^2 I}{cz^3} \mathbf{n},$$

где \mathbf{n} обозначает единичный вектор, направленный вертикально вверх из центра кольца.

При сильном скин-эффекте шарик приобретает магнитный момент $\mathbf{m}_{\text{ш}} \approx -(1/2)a^3 \mathbf{H}$. Следовательно, средняя по времени энергия взаимодействия шарика с магнитным полем кольца есть

$$U = -\frac{1}{2} \langle (\mathbf{m}_{\text{ш}} \cdot \mathbf{H}) \rangle = \frac{1}{4} a^3 \langle H^2 \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi R^2 I_0}{cz^3} \right)^2 a^3,$$

Следовательно, на шарик со стороны магнитного поля кольца действует сила

$$F = -\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{3\pi^2 a^3 R^4 I_0^2}{c^2 z^7},$$

направленная вверх. Она уравнивает силу тяжести $(4\pi/3)a^3 \rho g$, что приводит к следующему выражению для амплитуды тока в кольце:

$$I_0 = \frac{2}{3} \frac{z^3 c}{R^2} \sqrt{\frac{\rho g z}{\pi}} \approx 3,5 \cdot 10^6 \text{ А.}$$

Отметим, что мы не рассматриваем вопрос об устойчивости такого магнитного подвеса.

Глава 3

Экранирование переменного магнитного поля

Наиболее распространённое техническое применение скин-эффекта — экранирование переменного электромагнитного поля. Экранирование осуществляется путём окружения защищаемой аппаратуры проводящим экраном. Практическая трудность связана с тем, что обычно экран не может быть полностью замкнутым. Необходимы, например, различные отверстия для подвода питания аппаратуры, наблюдения за ней и т.д.

Влияние разрезов мы обсудим позднее, а сейчас отметим, что проводящие экраны ослабляют поле сильнее чем по простому экспоненциальному закону. Экранирование имеет место даже при слабом скин-эффекте, когда толщина скин-слоя $\delta \sim \sqrt{D_m T}$ (где $D_m = c^2/4\pi\sigma\mu$), «отросшего» за период изменения поля T , значительно больше толщины стенок экрана h . Это явление называют эффектом Лецендрата.

Рассмотрим к примеру цилиндрический экран радиуса a , ось которого параллельна переменному магнитному полю. Магнитное поле проникает на глубину, равную толщине стенок, за время

$$\tau \sim \frac{h^2}{D_m}.$$

Магнитный поток, который проникает за это время во внутреннюю часть цилиндра, равен потоку, заключенному в толщине стенок h :

$$\Delta\Phi \sim \pi a h H_{\text{out}}.$$

Этот поток изменяет магнитное поле внутри цилиндра на величину

$$\Delta H \sim \frac{\Delta\Phi}{\pi a^2} \sim \frac{h}{a} H_{\text{out}}.$$

За период изменения внешнего поля T внутрь цилиндрического экрана проникнет T/τ порций магнитного потока величиной $\Delta\Phi$. Соответственно, магнитное поле внутри цилиндра будет

$$H \sim \frac{T}{\tau} \Delta H \sim \frac{T}{\tau} \frac{h}{a} H_{\text{out}}.$$

Оно приблизится к величине внешнего поля за время

$$T \sim \frac{a h}{D_m}.$$

Формальное решение задачи о проникновении магнитного поля в тонкостенный полый цилиндр в приближении слабого скин-эффекта приведено ниже. При продольной ориентации магнитного поля относительно оси экрана задача может быть решена для экрана с сечением произвольного вида (раздел 1). При поперечной ориентации имеются простые решения для нескольких специальных случаев (раздел 2).

1. Продольное магнитное поле

В пределе слабого скин-эффекта толщина проводника считается малой по сравнению с толщиной скин-слоя $\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}$. Однако и тонкие проводники могут эффективно экранировать переменное магнитное поле. Это явление известно как эффект Лецендрата. Оно имеет большое практическое значение. Если внутрь тонкостенного проводящего экрана поместить какой-нибудь измерительный прибор, то он будет защищен (экранирован) от внешнего переменного магнитного поля и, что более важно, от вихревого электрического поля, которое порождается переменным магнитным полем в соответствии с законом электромагнитной индукции (1.2), открытого **Фарадеем (Michael Faraday)**.

Будем считать, что экран имеет форму цилиндра (необязательно круглого сечения), достаточно длинного, чтобы его можно было считать бесконечным. При этом задача становится двумерной и, соответственно, более простой.

Рассмотрим сначала случай, когда внешнее магнитное поле параллельно оси цилиндра.

Задача 26. Длинный проводящий тонкостенный цилиндр находится во внешнем переменном магнитном поле, которое параллельно оси цилиндра. Найти магнитное поле во внутренней полости в случае слабого скин-эффекта.

Решение. Пусть внешнее магнитное поле направлено по оси z и изменяется по закону

$$H = H_{\text{out}} e^{-i\omega t}.$$

Обозначим через S сечение цилиндра. По условию задачи толщина стенок цилиндра h значительно меньше его характерного радиуса, т.е. $h \ll \sqrt{S}$. Мы не предполагаем, что форма сечения цилиндра задана, а толщина стенок h постоянна. Однако ни толщина стенок, ни форма сечения не зависят от z .

Наличие экрана никак не влияет на внешнее магнитное поле, параллельное цилиндру. В квазистатическом пределе, когда длина волны $\lambda = 2\pi c/\omega$ считается большой по сравнению с характерным размером задачи (радиусом цилиндра или расстоянием от оси цилиндра) оно однородно как снаружи цилиндра, так и в его внутренней полости.

В случае слабого скин-эффекта, когда толщина скин-слоя $\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}$ значительно больше толщины стенок цилиндра h , т.е. $\delta \gg h$, плотность тока в стенках цилиндра

$$j = \sigma E_{\tau}$$

однородна, равно как и напряжённость электрического поля E_{τ} , которая направлена по касательной к поверхности стенки в каждой ее точке. Хотя в данном контексте неоднородность электрического поля по сечению стенки несущественна, мы условимся через E_{τ} здесь и далее обозначать тангенциальную проекцию электрического поля на внутреннюю поверхность экрана. Полный ток

$$I = j h$$

на единицу длины цилиндра есть величина постоянная, так что E_{τ} можно найти из уравнения

$$E_{\tau} = \frac{I}{\sigma h},$$

если величина I известна. Ток I находим из закона Фарадея

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt},$$

согласно которому Э.Д.С. индукции

$$\mathcal{E} = \oint E_{\tau} dl$$

при обходе по контуру сечения экрана пропорциональна скорости изменения магнитного потока

$$\Phi = H_{\text{in}} S.$$

Точность используемых нами формул для \mathcal{E} и Φ тем выше, чем тоньше стенки цилиндра. Напряжённости магнитного поля внутри и вне цилиндра связаны условием

$$H_{\text{out}} - H_{\text{in}} = -\frac{4\pi}{c} I. \quad (3.1)$$

Собирая все формулы вместе, находим отношение напряжённости магнитного поля внутри цилиндра к напряжённости внешнего поля:

$$H_{\text{in}}/H_{\text{out}} = \left[1 - \frac{2iS}{\delta^2} / \oint \frac{dl}{h} \right]^{-1}. \quad (3.2)$$

Это отношение составляет комплексный коэффициент ослабления магнитного поля цилиндрическим экраном. Комплексность коэффициента означает, что максимумы полей внутри и вне цилиндра достигаются в различные моменты времени. Величины этих максимумов соответственно равны $|H_{\text{in}}|$ и $|H_{\text{out}}|$. Искомый коэффициент ослабления равен отношению этих максимумов, т.е.

$$\left| \frac{H_{\text{in}}}{H_{\text{out}}} \right| = \left[1 + 4 (S^2/\delta^4) \left(\oint dl/h \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (3.3)$$

Цилиндр экранирует магнитное поле при условии, что

$$\delta^2 \ll (h/l)S, \quad (3.4)$$

где S и l — площадь и периметр сечения, соответственно, а h — средняя толщина стенок экрана. При этом толщина скин-слоя δ действительно может быть больше толщины стенок экрана, т.е. экранировка возможна и при слабом скин-эффекте.

В частном случае круглого цилиндра радиуса a со стенкой постоянной толщины h из (3.2) получаем известный результат [2, 13] (см. также задачу 16):

$$H_{\text{in}} = H_{\text{out}} [1 - i a h / \delta^2]^{-1}. \quad (3.5)$$

Для цилиндра прямоугольного сечения $2a \times 2b$ с толщиной стенок h_a и h_b (Рис. 3.1) имеем:

$$H_{\text{in}} = H_{\text{out}} \left[1 - \frac{2i a b}{(a/h_a + b/h_b) \delta^2} \right]^{-1}. \quad (3.6)$$

Если же толщины стенок одинаковы, т.е. $h_a = h_b = h$, то

$$H_{\text{in}} = H_{\text{out}} \left[1 - \frac{2i a b h}{(a + b) \delta^2} \right]^{-1}.$$

Для цилиндра с сечением в виде эллипса с полуосями $b < a$ и стенками постоянной толщины h находим:

$$H_{\text{in}} = H_{\text{out}} \left[1 - \frac{\pi i b h}{2 E(\sqrt{1 - b^2/a^2}) \delta^2} \right]^{-1}, \quad (3.7)$$

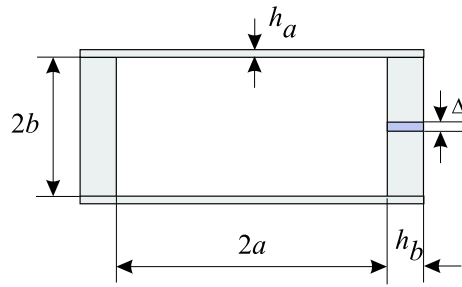


Рис. 3.1: Цилиндрический экран с прямоугольным сечением.

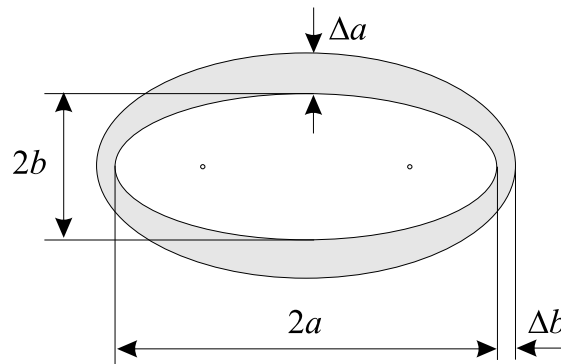


Рис. 3.2: Цилиндрический экран эллиптического сечения со стенками переменной толщины. Внутренняя и внешняя поверхности стенки образованы софокусными эллипсами.

где

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi$$

обозначает полный эллиптический интеграл 2-го рода.

Наконец, достоин упоминать ещё случай тонкостенного цилиндра эллиптического сечения со стенками переменной толщины. Пусть внутренний и внешний контуры сечения стенок образуют софокусные эллипсы, как показано на Рис. 3.2. При этом толщина стенок $\Delta a = b \Delta \xi_*$, $\Delta b = a \Delta \xi_*$ по направлению главных полуосей обратно пропорциональна длине полуосей a , b , как показано на рисунке 3.2. Здесь $\Delta \xi_* = \sqrt{(\Delta a/a)(\Delta b/b)} \ll 1$ — малый безразмерный параметр. Для экрана с таким сечением

$$H_{in} = H_{out} [1 - i a b \Delta \xi_*/\delta^2]^{-1}. \tag{3.8}$$

Задача 27. В условиях предыдущей задачи найти электрическое поле внутри экрана прямоугольного сечения $2a \times 2b$ с толщиной стенок h_a и h_b , малой по сравнению с размерами экрана и толщиной скин-слоя δ .

Решение. Электрическое поле имеет компоненты E_x, E_y , не зависящие от z . Уравнение $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ обратится в тождество, если искать решение в виде

$$\mathbf{E} = \nabla \Psi \times \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.9)$$

где $\Psi = \Psi(x, y)$ — скалярная функция, не зависящая от z , а $\hat{\mathbf{z}}$ — единичный вектор вдоль оси цилиндра. Как следует из уравнения

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{H}, \quad (3.10)$$

она удовлетворяет двумерному уравнению Пуассона с постоянной правой частью:

$$\nabla^2 \Psi = -\frac{i\omega}{c} H_{\text{in}}. \quad (3.11)$$

Его решение будем искать в виде полинома второй степени по декартовым координатам x, y :

$$\Psi = \frac{i\omega}{2c} H_{\text{in}} [\alpha x^2 + (1 - \alpha)y^2 + 2\beta xy + \mu x + \nu y]. \quad (3.12)$$

Коэффициенты α, β, μ, ν находим из граничного условия на поверхности внутренней прямоугольной области. Из постоянства полного тока Фуко $I = \sigma E_\tau h$ при обходе вокруг цилиндра следует, что касательная проекция электрического поля E_τ на внутренней поверхности стенок обратно пропорциональна их толщине, так как в условиях слабого скин-эффекта электрическое поле практически однородно по сечению проводящих стенок. Если поместить начало системы координат на ось симметрии цилиндра, то все коэффициенты в полиномиальном разложении (3.12), кроме α , обращаются в нуль. В итоге находим функцию Ψ :

$$\Psi = -\frac{i\omega}{2c} \frac{h_a b x^2 + h_b a y^2}{h_b a + h_a b} H_{\text{in}}, \quad (3.13)$$

а затем и электрическое поле во внутренней полости прямоугольного цилиндра:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\frac{i\omega}{c} \frac{h_b a y}{h_b a + h_a b} H_{\text{in}}, \\ E_y &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{i\omega}{c} \frac{h_a b x}{h_b a + h_a b} H_{\text{in}}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Подставив найденное поле \mathbf{E} в уравнение (3.10), нетрудно найти неоднородную поправку δH_{in} к магнитному полю внутри цилиндра:

$$\delta H_{\text{in}} = -\frac{i\omega}{c} \Psi + \text{const}.$$

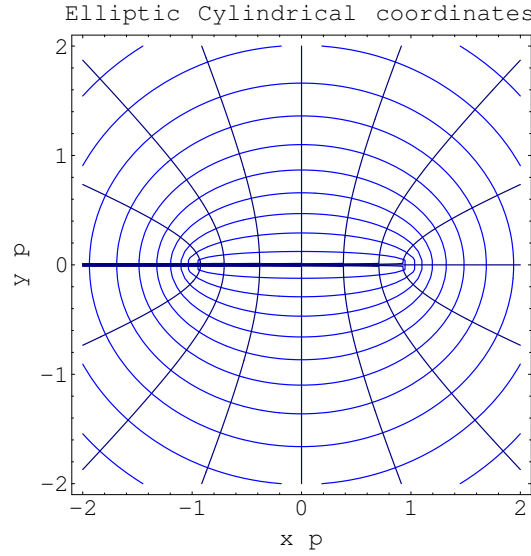


Рис. 3.3: Эллиптическая система координат.

Константу в этом выражении находим из условия, что δH_{in} не создаёт дополнительный магнитный поток через сечение экрана:

$$\delta H_{in} = -\frac{\omega^2}{2c^2} \frac{h_b a (y^2 - b^2/3) + h_a b (x^2 - a^2/3)}{h_b a + h_a b} H_{in}.$$

Неоднородная добавка δH_{in} мала по сравнению с H_{in} в квазистатическом приближении, когда $a b \omega^2/c^2 \ll 1$. Что касается величины H_{in} , то её следует вычислять по формуле (3.6).

Задача 28. Найти электрическое поле внутри тонкостенного экрана эллиптического сечения с главными полуосями a, b .

Решение. В плоскости сечения экрана введём эллиптические координаты (Рис. 3.3)

$$x = p \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = p \operatorname{sh} \xi \sin \eta, \quad (3.15)$$

где p — расстояние между фокусами эллипсов. Это расстояние можно найти из пары уравнений

$$a = p \operatorname{ch} \xi_*, \quad b = p \operatorname{sh} \xi_*, \quad (3.16)$$

где ξ_* — эллиптическая координата ξ экрана. Вычислив квадрат дифференциала расстояния

$$(dx)^2 + (dy)^2 = (h_\xi d\xi)^2 + (h_\eta d\eta)^2,$$

нетрудно найти коэффициенты Ламэ h_ξ, h_η для введённой системы координат. Они равны друг другу:

$$h_\xi = h_\eta = \frac{p}{\sqrt{2}} \sqrt{\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta}.$$

Воспользовавшись инвариантным определением градиента запишем двумерный градиент $\nabla\Psi$ в эллиптических координатах:

$$\nabla\Psi = \left(\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial\Psi}{\partial\xi}, \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial\Psi}{\partial\eta} \right).$$

Для дивергенции произвольного двумерного вектора \mathbf{a} имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left[\frac{\partial}{\partial\xi} (h_\eta a_\xi) + \frac{\partial}{\partial\eta} (h_\xi a_\eta) \right],$$

где a_ξ, a_η — так называемые физические компоненты вектора \mathbf{a} . Поставляя в последнюю формулу $\mathbf{a} = \nabla\Psi$, получаем выражение для лапласиана $\nabla^2\Psi = \operatorname{div} \nabla\Psi$ в эллиптических координатах. Вследствие равенства $h_\xi = h_\eta$ оно существенно упрощается, так что уравнение (3.11) для Ψ приобретает сравнительно простой вид:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta^2} = -\frac{p^2}{2} (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta) \frac{i\omega}{c} H_{\text{in}}. \quad (3.17)$$

На границе области $0 \leq \xi < \xi_*$, где мы ищем решение, следует считать заданной зависимость касательной проекции электрического поля E_η от координаты η вдоль поверхности экрана. Она определяется из условия, что полный ток

$$I = h \sigma E_\eta$$

пронизывающий стенки экрана, не зависит от η ; при этом саму величину I предстоит найти в ходе решения задачи.

Если толщина стенок проводящего экрана h постоянна, то из постоянства I следует также постоянство E_η на поверхности экрана (в фиксированный момент времени). Однако тогда переменной оказывается величина $\partial\Psi/\partial\xi$ на границе области определения решения, и в рассматриваемой задаче не удаётся, как говорят, разделить переменные.

Простое решение существует для эллиптического экрана со стенками переменной толщины, когда внутренняя и внешняя границы сечения экрана образованы софокусными эллипсами (Рис. 3.2). При этом толщина стенок экрана

$$h(\eta) = h_\xi(\xi_*, \eta) \Delta\xi_*$$

пропорциональна коэффициенту Ламэ h_ξ , а производная $\partial\Psi/\partial\xi$ постоянная вдоль при $\xi = \xi_*$. Ослабление магнитного поля внутри такого цилиндра вычисляется по формуле (3.8).

Рассмотрим именно этот случай. Решение уравнения Пуассона (3.17), удовлетворяющее граничному условию

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = \text{const} \quad (3.18)$$

при $\xi = \xi_*$, ищем решение в виде

$$\Psi(\xi, \eta) = \Psi_0(\xi) + \Psi_2(\xi) \cos 2\eta.$$

Разделяя переменные в уравнении с частными производными (3.17), получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\begin{aligned} \Psi_0'' &= -\frac{i\omega}{c} H_{\text{in}} \frac{p^2}{2} \text{ch } 2\xi, \\ \Psi_2'' - 4\Psi_2 &= \frac{i\omega}{c} H_{\text{in}} \frac{p^2}{2}. \end{aligned}$$

Интегрируя эти уравнения с дополнительными условиями $\Psi_0'(0) = 0$, $\Psi_2'(0) = 0$, следующими из непрерывности E_η на линии $\xi = 0$, соединяющей фокусы эллиптической системы координат, находим:

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= -\frac{i\omega}{c} H_{\text{in}} \frac{p^2}{8} \text{ch } 2\xi + \mathbb{A}, \\ \Psi_2 &= \frac{i\omega}{c} H_{\text{in}} \frac{p^2}{8} + \mathbb{B} \text{sh } 2\xi + \mathbb{C} \text{ch } 2\xi. \end{aligned}$$

Константу интегрирования \mathbb{A} без ограничения общности можно считать равной нулю, $\mathbb{A} = 0$, так как ее значение не влияет на величину вихревого электрического поля (3.9), поскольку та зависит только от производных функции Ψ . Константа \mathbb{B} также равна нулю; иначе электрическое поле терпит разрыв на линии $\xi = 0$, соединяющей фокусы эллиптической системы координат. Под конец выясняется, что и последняя константа \mathbb{C} равна нулю. Это следует из равенства $\Psi_2'(\xi_*) = 0$, являющегося следствием граничного условия (3.18). Завершая вычисления, находим функцию Ψ :

$$\Psi = -\frac{i\omega}{c} \frac{p^2}{8} H_{\text{in}} [\text{ch } 2\xi - \cos 2\eta],$$

а затем и вихревое электрическое поле внутри экрана:

$$\begin{aligned} E_\xi &= \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = -\frac{p}{4\sqrt{\text{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta}} \frac{i\omega}{c} H_{\text{in}} \sin 2\eta, \\ E_\eta &= -\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = \frac{p}{4\sqrt{\text{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta}} \frac{i\omega}{c} H_{\text{in}} \text{sh } 2\xi. \end{aligned}$$

2. Поперечное магнитное поле

В случае, когда внешнее переменное магнитное поле перпендикулярно оси цилиндра, общее решение для цилиндра произвольного сечения без помощи численных методов получить не удаётся. Мы рассмотрим два частных случая: круглый цилиндр со стенками постоянной толщины и эллиптический цилиндр, толщина стенок которого подобрана специальным образом.

Ключом к решению первой задачи является важное наблюдение, что во внутренней полости экрана, магнитное поле \mathbf{H}_{in} однородно. Заметим, что в общем случае магнитное поле внутри экрана неоднородно, если внешнее поле перпендикулярно оси цилиндра. В этом состоит важное отличие от случая продольной ориентации внешнего магнитного поля и основная причина, по которой не удаётся найти аналитическое решение для экрана с произвольной формой сечения.

Задача 29. Тонкостенный круглый цилиндр радиуса a помещен во внешнее магнитное поле \mathbf{H}_0 , перпендикулярное оси цилиндра. Найти магнитное поле во всем пространстве, предполагая, что толщина стенки цилиндра h мала по сравнению с радиусом цилиндра и толщиной скин-слоя δ .

Решение. Для круглого экрана из закона Фарадея

$$\text{rot } \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{H}_{\text{in}} \quad (3.19)$$

находим, что вихревое электрическое поле направлено вдоль оси цилиндра:

$$E_z = \frac{i\omega}{c} H_{\text{in}} r \sin \alpha, \quad (3.20)$$

где r — расстояние от оси цилиндра, а угол α отсчитывается от направления \mathbf{H}_{in} . Снаружи магнитное поле \mathbf{H}_{out} является суперпозицией внешнего однородного поля \mathbf{H}_0 и поля линейного диполя \mathbf{m} :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{out}} &= \mathbf{H}_0 + \text{rot} \frac{[\mathbf{m} \times \mathbf{r}]}{r^2} \\ &= \mathbf{H}_0 + \frac{2\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - r^2 \mathbf{m}}{r^4}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где \mathbf{r} — двумерный вектор, перпендикулярный оси цилиндра. Вихревое электрическое поле наводит в проводящей стенке цилиндра ток Фуко, величину которого нетрудно найти, учитывая, что электрическое поле мало изменяется на толщине стенки:

$$j_z = \sigma h E_z,$$

где E_z следует вычислить для радиуса r , равного радиусу цилиндра a .

Сшивая магнитное поле внутри и вне цилиндра при помощи граничных условий

$$H_{\text{out } \alpha} - H_{\text{in } \alpha} = -\frac{4\pi}{c} j_z \quad (3.22)$$

$$H_{\text{out } r} - H_{\text{in } r} = 0, \quad (3.23)$$

взятых при $r = a$, находим магнитное поле во внутренней полости цилиндра

$$\mathbf{H}_{\text{in}} = \frac{\mathbf{H}_0}{1 - i a h / \delta^2} \quad (3.24)$$

и магнитный момент

$$\mathbf{m} = \frac{i a h / \delta^2}{1 - i a h / \delta^2} \mathbf{H}_0 a^2. \quad (3.25)$$

Рассмотрим теперь цилиндрический экран с эллиптическим сечением. Специальным подбором профиля толщины стенок можно добиться, чтобы магнитное поле внутри цилиндра было однородно, как и в предыдущей задаче. Для такого цилиндра удаётся построить аналитическое решение.

Задача 30. Тонкостенный цилиндр с сечением в виде эллипса с главными осями a и b помещён во внешнее магнитное поле $\mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}$, перпендикулярное оси цилиндра. Найти магнитное поле во всем пространстве, предполагая, что средняя толщина стенки цилиндра мала по сравнению с a и b .

Решение. В плоскости сечения цилиндра введём эллиптические координаты ξ, η так, что (Рис. 3.3)

$$x = p \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = p \operatorname{sh} \xi \sin \eta, \quad (3.26)$$

где p — расстояние между фокусами эллипсов. Это расстояние можно найти из пары уравнений

$$a = p \operatorname{ch} \xi_*, \quad b = p \operatorname{sh} \xi_*, \quad (3.27)$$

где ξ_* — эллиптическая координата ξ экрана. Параметр ξ изменяется в пределах от 0 до ∞ , а η от $-\pi$ до $+\pi$. Записав квадрат дифференциала расстояния в виде

$$(dx)^2 + (dy)^2 = (h_\xi d\xi)^2 + (h_\eta d\eta)^2,$$

найдем коэффициенты Ламэ h_ξ, h_η для эллиптической системы координат. Они равны друг другу:

$$h_\xi = h_\eta = p \sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta}.$$

Поскольку токи в стенках цилиндра текут параллельно оси цилиндра z , задачу удобно свести к поиску z -компоненты векторного потенциала $\mathbf{A} = A_z \hat{\mathbf{z}}$, при этом остальные компоненты векторного потенциала, а также скалярный потенциал можно считать равными нулю.¹ При этом

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = \nabla A_z \times \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.28)$$

Вне стенок, где нет токов, функция A_z удовлетворяет скалярному уравнению Лапласа

$$\nabla^2 A_z = 0,$$

поскольку $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, а $\text{rot rot}(A_z \hat{\mathbf{z}}) = -\hat{\mathbf{z}} \nabla^2 A_z$.

Учитывая, что дифференциал скалярной функции

$$dA_z = \frac{\partial A_z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial A_z}{\partial \eta} d\eta$$

связан с её градиентом ∇A_z соотношением $dA_z = (\nabla A_z \cdot d\mathbf{r})$, причём $d\mathbf{r} = (h_\xi d\xi, h_\eta d\eta, dz)$, найдём так называемые физические компоненты градиента в эллиптических координатах

$$(\nabla A_z)_\xi = \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial A_z}{\partial \xi}, \quad (\nabla A_z)_\eta = \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial A_z}{\partial \eta},$$

а затем из (3.28) — физические компоненты магнитного поля:

$$H_\xi = (\nabla A_z)_\eta = \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial A_z}{\partial \eta}, \quad H_\eta = -(\nabla A_z)_\xi = -\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial A_z}{\partial \xi}.$$

Подставляя $\mathbf{a} = \nabla A_z$ в формулу

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta a_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi a_\eta) \right]$$

для дивергенции двумерного вектора \mathbf{a} с физическими компонентами a_ξ, a_η , получаем выражение для лапласиана $\nabla^2 A_z = \text{div } \nabla A_z$ в эллиптических координатах. Вследствие равенства $h_\xi = h_\eta$ оно существенно упрощается, так что уравнение для A_z приобретает такой же вид, как в декартовых координатах:

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial \eta^2} = 0. \quad (3.29)$$

¹ Это утверждение становится очевидным, если записать волновые уравнения для потенциалов в Лоренцевской калибровке: $\nabla^2 \mathbf{A} - (1/c^2) \partial^2 \mathbf{A} / \partial t^2 = -(4\pi/c) \mathbf{j}$, $\nabla^2 \varphi - (1/c^2) \partial^2 \varphi / \partial t^2 = -4\pi \rho$.

Учитывая, что угловая координата η имеет период 2π , общее решение уравнения (3.29), можно записать в виде ряда

$$A_z = \sum_{n=1}^{\infty} [\mu_n \operatorname{sh}(n\xi) \sin(n\eta) + \nu_n \operatorname{ch}(n\xi) \cos(n\eta) + \mu'_n \operatorname{sh}(n\xi) \cos(n\eta) + \nu'_n \operatorname{ch}(n\xi) \sin(n\eta)] = 0. \quad (3.30)$$

Коэффициенты ряда определяем из граничных условий.

На большом удалении от цилиндра при $\xi \rightarrow \infty$, решение стремится к однородному полю, то есть

$$A_z \rightarrow H_{0x} y - H_{0y} x = H_{0x} p \operatorname{sh} \xi \sin \eta - H_{0y} p \operatorname{ch} \xi \cos \eta.$$

Иными словами, вне цилиндра из ряда (3.30) нужно удалить быстро растущие слагаемые. Следовательно,

$$A_{z,\text{out}} = H_{0x} p \operatorname{sh} \xi \sin \eta - H_{0y} p \operatorname{ch} \xi \cos \eta + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n e^{-n\xi} \sin(n\eta) + b_n e^{-n\xi} \cos(n\eta)] = 0 \quad (3.31)$$

при $\xi > \xi_*$.

На линии $\xi = 0$, соединяющей фокусы эллиптической системы координат, производные $\partial A_z / \partial \xi$ и $\partial A_z / \partial \eta$ должны менять знак при замене $\eta \rightarrow -\eta$ иначе магнитное поле \mathbf{H} имеет разрыв на этой линии. Отсюда следует, что внутри цилиндра равны нулю коэффициенты μ'_n, ν'_n ряда (3.30). Следовательно,

$$A_{z,\text{in}} = \sum_{n=0}^{\infty} [\mu_n \operatorname{sh}(n\xi) \sin(n\eta) + \nu_n \operatorname{ch}(n\xi) \cos(n\eta)] = 0 \quad (3.32)$$

при $\xi < \xi_*$. Сшивка коэффициентов рядов (3.31) и (3.32) производится при помощи граничных условий на поверхности цилиндра при $\xi = \xi_*$. Из непрерывности $E_z = -(1/c) \partial A_z / \partial t$ здесь следует непрерывность функции A_z :

$$A_{z,\text{out}} = A_{z,\text{in}}. \quad (3.33)$$

Поскольку проекция H_ξ на нормаль к поверхности экрана пропорциональна $\partial A_z / \partial \eta$ условие (3.33) обеспечивает также непрерывность нормальной проекции магнитного поля. Второе независимое граничное условие на экране

$$\frac{1}{h_\xi} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} A_{z,\text{out}} - \frac{\partial}{\partial \xi} A_{z,\text{in}} \right] = -\frac{4\pi i \omega \sigma h}{c^2} A_z \quad (3.34)$$

связывает величину скачка касательной к экрану проекции магнитного поля с током в стенках экрана. Так как коэффициент Ламэ h_ξ в этом условии зависит от угловой переменной, гармоники η в рядах (3.31) и (3.32) в общем случае запутываются,

так что все коэффициенты этих рядов, вообще говоря, отличны от нуля. Это означает, что поле внутри экрана не однородно, а вне цилиндра присутствуют все члены мультипольного разложения.

Исключение составляет случай, когда толщина стенок экрана h обратно пропорциональна h_ξ , так что величина $Z = 2h h_\xi / \delta^2$ одинакова при всех η . При этом отличны от нуля только коэффициенты

$$\begin{aligned} \mu_1 &= H_{0x} p / [1 - iZ e^{-\xi_*} \operatorname{sh} \xi_*], \\ \nu_1 &= -H_{0y} p / [1 - iZ e^{-\xi_*} \operatorname{ch} \xi_*], \\ a_1 &= iZ H_{0x} p \operatorname{sh}^2 \xi_* / [1 - iZ e^{-\xi_*} \operatorname{sh} \xi_*], \\ b_1 &= -iZ H_{0y} p \operatorname{ch}^2 \xi_* / [1 - iZ e^{-\xi_*} \operatorname{ch} \xi_*]. \end{aligned}$$

Магнитное поле внутри экрана однородно, но имеет иное направление, нежели внешнее поле \mathbf{H}_0 , если только то не направлено вдоль одной из главных осей эллиптического сечения:

$$\begin{aligned} H_{x,\text{in}} &= H_{0x} / [1 - iZ e^{-\xi_*} \operatorname{sh} \xi_*], \\ H_{y,\text{in}} &= H_{0y} / [1 - iZ e^{-\xi_*} \operatorname{ch} \xi_*]. \end{aligned}$$

3. Экран с разрезом

Устремив к бесконечности в формулах (3.6), (3.7) или (3.8) больший размер a сечения экрана (при постоянной толщине стенки $h = a \Delta \xi_*$ в самом узком месте эллиптического экрана со стенками переменной толщины), получим формальное решение одномерной задачи:

$$H_{\text{in}} = H_{\text{out}} [1 - i \alpha b h / \delta^2]^{-1}. \quad (3.35)$$

Числовой коэффициент α во всех трёх случаях будет разным (соответственно $\alpha = 2h_a/h_b$, $\alpha = \pi/2$ и $\alpha = 1$), хотя геометрия, полученная в результате такого предельного перехода будет одинаковой: две бесконечные проводящие пластины толщиной h разнесены на расстояние $2b$ друг от друга.

Отсутствие общего предела объясняется тем, что одномерная задача плохо обусловлена. Действительно, область пространства между пластинами можно назвать внутренней полостью экрана лишь при условии, что проводящие пластины соединяются на «бесконечности». В ином случае, когда способ замыкания токов, текущих по пластинам, не конкретизирован, невозможно определить величину тока в пластинах и, как следствие, коэффициент ослабления поля «внутри» экрана.

Чтобы пояснить сказанное, рассмотрим прямоугольный экран $2a \times 2b$ со щелью в одной из стенок экрана, как показано на Рис. 3.1. Будем считать, что

разрезы сделаны в торцах экрана, которые для механической прочности всей системы существенно толще, чем натянутые на них фольги, а толщина разрезов Δ значительно меньше толщины торцов, $\Delta \ll h_b$.

Рассмотрим сначала случай, когда толщина скин-слоя значительно больше толщины торцов, т.е. $\delta \gg h_b > h_a$. Позднее мы обсудим также случай $h_b \gg \delta \gg h_a$.

Разрез в торцах образует плоский конденсатор с ёмкостью

$$C = \frac{\varepsilon h_b}{4\pi \Delta} \quad (3.36)$$

на единицу длины экрана, где ε — диэлектрическая проницаемость материала в зазоре. Эти конденсаторы заряжаются током I , который наводится электродвижущей силой

$$\mathcal{E} = i(\omega/c) H_{\text{in}} S \quad (3.37)$$

от переменного потока магнитного поля H_{in} через внутреннее сечение прямоугольного экрана $S = 4ab$. Ток I находим из уравнения

$$RI + Q/C = \mathcal{E}, \quad (3.38)$$

где $R = \oint dl/\sigma h = (4/\sigma)(a/h_a + b/h_b)$ — сопротивление на единицу длины экрана току, текущему в его стенках, а $Q = I/(-i\omega)$ — заряд конденсатора (вновь на единицу длины).

Разрешая уравнение (3.38) относительно I и подставляя результат в уравнение (3.1), получаем:

$$\frac{H_{\text{in}}}{H_{\text{out}}} = \frac{1 + i/\omega\tau}{1 + i/\omega\tau - 2i(S/\delta^2)/\oint dl/h}, \quad (3.39)$$

где

$$\tau = RC$$

есть постоянная RC цепочки. Влияние разреза не существенно, если $\omega\tau \gg 1$.

Полученное решение верно, если электрическое поле в зазоре можно считать однородным. Только при этом условии оправдано приближение плоского конденсатора (3.36) при вычислении емкости зазора. Это легко проверить прямым вычислением поправки к величине E_y на внутренней поверхности экрана, найденной в задаче 27. Такая поправка содержит дополнительный множитель h_b^2/δ^2 по сравнению с E_y , который мал, если толщина скин-слоя велика по сравнению с толщиной торца.

В обратном предельном случае, когда $\delta \ll h_b$, но $h_a \ll \delta$, получаем другую формулу:

$$\frac{H_{\text{in}}}{H_{\text{out}}} = \left\{ 1 + (1 - i) \frac{h_a b}{\delta a} + (1 + i) \frac{\pi \Delta \sigma h_a}{\varepsilon a \omega \delta} - \frac{2i h_a b}{\delta^2} \right\}^{-1}. \quad (3.40)$$

Задача 31. Вывести формулу (3.40). Ток на внешней стороне торца находим из уравнения

$$H_{\text{out}} = -\frac{4\pi}{c} I_{\text{out}}.$$

Аналогичное уравнение определяет ток на внутренней стороне торца:

$$H_{\text{in}} = -\frac{4\pi}{c} I_{\text{in}}.$$

Эти токи текут в противоположные стороны, поэтому

$$H_{\text{out}} - H_{\text{in}} = -\frac{4\pi}{c} I,$$

где

$$I = I_{\text{out}} - I_{\text{in}}$$

обозначает ток в фольге.

Зная I_{out} и используя решение задачи о сильном скинировании тока на плоской границе проводника, нетрудно найти распределение плотности тока на внутренней стороне торца:

$$j_y = \frac{1 - i}{\delta} \exp\left[-\frac{1 - i}{\delta} (x - a)\right] I_{\text{out}}.$$

Далее с помощью закона Ома выражаем электрическое поле в металле с внутренней стороны торца через плотность тока на внутренней поверхности торца:

$$\sigma E_\tau = j_y(x = a).$$

Электрическое поле в зазоре с внутренней стороны торца находим, приравняв эту же плотность тока к плотности тока смещения в зазоре:

$$\frac{-i \omega}{c} \varepsilon E_\tau = \frac{4\pi}{c} j_y(x = a).$$

В соответствии с законом Фарадея, Э.Д.С. по при обходе по внутренней поверхности экрана связана с изменением магнитного потока через сечение внутренней полости экрана:

$$\mathcal{E} = \frac{i\omega}{c} H_{\text{in}} S.$$

С другой стороны, в соответствии с законом Кирхгофа, та же Э.Д.С. равна

$$\mathcal{E} = \frac{I}{\sigma h_a} 4a - \left(\frac{1-i}{\delta \sigma} I_{\text{in}} \right) 4b - \left(\frac{1+i}{\delta} \frac{4\pi}{\omega \varepsilon} I_{\text{in}} \right) \Delta.$$

Приравниваем \mathcal{E} и исключаем токи, получаем уравнение

$$\frac{4a}{\sigma h_a} (H_{\text{out}} - H_{\text{in}}) - (1-i) \frac{4b}{\delta \sigma} H_{\text{in}} - (1+i) \frac{4\pi \Delta}{\delta \omega \varepsilon} H_{\text{in}} = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} S H_{\text{in}}.$$

Отсюда получаем формулу (3.40).

Задача 32. Бесконечный тонкостенный полый цилиндр в виде трубы с внешним радиусом a и толщиной стенки $h \ll a$ помещён в переменное магнитное поле $\mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}$, параллельное его оси. Найти амплитуду поля в полости в пределе $\delta \ll h$.

Решение. При сильном скин-эффекте в первом приближении поле экспоненциально убывает вглубь проводника от значения H_0 на поверхности:

$$H(r) = H_0 e^{-k(a-r)},$$

где $k = (1-i)/\delta$. В стенке цилиндра возникает азимутальный ток с плотностью

$$j_\alpha(r) = -\frac{ck}{4\pi} H(r),$$

так что полный ток на единицу длины цилиндра равен

$$I = \int_{a-h}^a j_\alpha(r) dr = -\frac{c}{4\pi} H_0 (1 - e^{-kh}).$$

Этот ток уменьшает поле во внутренней полости цилиндра до величины

$$H_* = H_0 + \frac{4\pi I}{c} = H_0 e^{-kh}.$$

Однако такой расчёт ошибочен и установившееся поле в полости H_{in} будет существенно меньше, чем H_* .

Чтобы найти H_{in} , нужно учесть, что в стенке цилиндра в дополнение к (32) существует экспоненциально спадающее поле от внутренней поверхности стенки к

внешней, причём на внутренней поверхности его амплитуда есть пока ещё неизвестная величина H_* . Таким образом,

$$H(r) = H_0 e^{-k(a-r)} + H_* e^{k(a-r-h)}.$$

На наружной поверхности стенки цилиндра (при $r = a$) $H = H_0 + H_* e^{-kh} \approx H_0$, как и должно быть, а на внутренней поверхности стенки (при $r = a - h$) имеем

$$H_{\text{in}} = H_0 e^{-kh} + H_*.$$

Далее нужно учесть, что непрерывна азимутальная компонента электрического поля на внутренней поверхности стенки цилиндра. Со стороны полости она равна

$$E_\alpha = \frac{\mathcal{E}}{2\pi a} = -\frac{1}{2\pi c a} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{i\omega}{2\pi c a} \pi a^2 H_{\text{in}} = \frac{i\omega a}{2c} H_{\text{in}}.$$

Со стороны стенки

$$E_\alpha = \frac{c}{4\pi\sigma} \text{rot}_\alpha \mathbf{H} = -\frac{c}{4\pi\sigma} \frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{ck}{4\pi\sigma} (H_0 e^{-kh} - H_*) = -\frac{ck}{4\pi\sigma} (2H_0 e^{-kh} - H_{\text{in}}).$$

Приравнивая эти выражения, получим уравнение

$$\frac{i\omega a}{2c} H_{\text{in}} = -\frac{ck}{4\pi\sigma} (2H_0 e^{-kh} - H_{\text{in}}),$$

откуда находим

$$2H_0 e^{-kh} = H_{\text{in}} \left(1 - \frac{2\pi i \sigma \omega a}{c^2 k} \right) = H_{\text{in}} \left(1 + \frac{ka}{2\mu} \right) \approx \frac{ka}{2\mu} H_{\text{in}}.$$

Следовательно,

$$|H_{\text{in}}| = 2\sqrt{2} \frac{\delta}{a} \mu H_0 e^{-h/\delta},$$

что составляет только малую долю $2\sqrt{2}\mu\delta/a \ll 1$ значения, найденного в первом приближении.

Глава 4

Нестационарный скин-эффект

Пусть на плоской границе полупространства, занятого проводящей средой в момент времени $t = 0$ мгновенно создано магнитное поле, параллельное поверхности проводника. Вначале предположим, что после возникновения магнитного поля поддерживается на постоянном уровне; позднее мы избавимся от этого предположения.

Сначала построим качественную картину явления. Обратимся к уравнению (2.2), которое повторим здесь для удобства:

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = D_m \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}. \quad (4.1)$$

Поскольку в рассматриваемой задаче не задан масштаб времени (магнитное поле на границе создано «мгновенно», а затем поддерживается на постоянном уровне), частную производную по времени $\partial H_z / \partial t$ можно оценить как H_{out}/t , где H_{out} — напряжённость магнитного поля вне проводника, так как иного параметра, имеющего размерность времени, кроме времени t , прошедшего с момента включения поля, в задаче нет. Точно так же, поскольку в задаче не задан масштаб длины (проводник занимает бесконечное полупространство), вторую производную $\partial^2 H_z / \partial x^2$ по координате x нельзя оценить иначе как H_{out}/x^2 . Подставив эти оценки производных в уравнение (4.1), найден время t , которое необходимо для диффундирования магнитного поля на глубину x :

$$t \sim x^2 / D_m.$$

Можно также сказать, что за время t магнитное поле проникает в проводник на глубину

$$x \sim \sqrt{D_m t}.$$

Такого рода простые оценки позволяют качественно объяснить достаточно сложные явления, когда поиск точного решения задачи сопряжён с большими трудностями. Что касается задачи о мгновенном включении магнитного поля на границе проводника, то для неё точное решение найти совсем нетрудно. Достаточно учесть, что в этой задаче действительно нет «внешних» масштабов времени и длины.

1. Автомоделное решение

Во-первых, заметим, что задача линейна. Следовательно, величина внешнего магнитного поля H_{out} может входить в решение только в качестве множителя, т.е.

$$H_z(x, t) = H_{\text{out}} F(x, t)$$

где $F(x, t)$ — безразмерная функция. Иными словами, профиль магнитного в проводнике в заданный момент времени t , нормированный на H_{out} , будет одинаков при любой величине H_{out} .

Теперь обратимся к функции $F(x, t)$. Она безразмерна, но зависит от размерных переменных x и t . Так как в задаче нет параметров времени и длины, то единственный способ составить безразмерную функцию из размерных переменных заключается в том, чтобы составить из этих переменных безразмерную переменную. Нетрудно видеть, что такая безразмерная переменная действительно существует и равна

$$\xi = x / \sqrt{4D_m t}.$$

Нетрудно также видеть, что другие безразмерные комбинации, которые можно составить из x и t , всегда можно выразить через безразмерную функцию переменной ξ . Таким образом, мы приходим к выводу, что функция $F(x, t)$ может зависеть от x и t только через зависимость ξ от x и t , т.е.

$$H_z(x, t) = H_{\text{out}} F(\xi).$$

Входящие в уравнение (4.1) частные производные по координате x и времени t выражаются через производные функции $F(\xi)$ по ξ :

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{x}{2\sqrt{4D_m t^3}} F'(\xi), \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{4D_m t}} \right)^2 F''(\xi),$$

где штрих обозначает дифференцирование по ξ . Подставляя эти выражения в (4.1) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-2\xi F' = F''.$$

Производя в нём разделение дифференциалов,

$$\frac{dF'}{F'} = -2\xi d\xi,$$

выполним первое интегрирование:

$$F' = \mathbb{B} e^{-\xi^2}.$$

Результат повторного интегрирования

$$F = \mathbb{B} \int_0^\xi e^{-\xi^2} d\xi + \mathbb{C},$$

выражается через функцию ошибок

$$\text{erf}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi \exp(-\xi^2) d\xi.$$

Константы $C_{1,2}$ находим из граничных условий. На поверхности проводника, т.е. при $\xi = 0$, магнитное поле равно H_{out} ; следовательно, $\mathbb{C} = F(0) = 1$. На достаточном удалении от границы магнитное поле равно нулю, т.е. $F(\infty) = 0$. Учитывая, что $\text{erf}(\infty) = 1$, находим окончательно:

$$H_z = H_{\text{out}} \left[1 - \text{erf}(x/\sqrt{4D_m t}) \right]. \quad (4.2)$$

Преобразованием подобия (проще говоря, изменением масштабов) профиль магнитного поля $H_z(x, t_1)$ в произвольный момент времени t_1 можно совместить с профилем $H_z(x, t_2)$ в любой другой момент времени t_2 . Такие решения называются *автомодельными*.

Имея автомодельное решение задачи о проникновении в проводник мгновенно возникшего на его границе магнитного поля совсем нетрудно найти решение для общего случая, когда магнитного поле на границе изменяется по произвольному закону $H_{\text{out}}(t)$. Действительно, мы можем представить функцию $H_{\text{out}}(t)$ в виде последовательности импульсов величиной $dH_{\text{out}}(t') = (dH_{\text{out}}(t')/dt') dt'$, приходящих на границу проводника в различные моменты времени t' . Поле от каждого такого импульса проникает в проводник по закону

$$dH_z = \left[1 - \text{erf}(x/\sqrt{2D_m (t - t')}) \right] dH_{\text{out}}(t').$$

Остаётся только просуммировать по всем импульсам, таким что $t' < t$. Заменяя сумму интегралом, получаем:

$$H_z(x, t) = \int_{-\infty}^t \left[1 - \operatorname{erf}\left(x/\sqrt{2D_m(t-t')}\right) \right] \frac{dH_{\text{out}}(t')}{dt'} dt.$$

Интегрированием по частям это выражение можно преобразовать к иному виду. Приняв во внимание, что $H_{\text{out}}(-\infty) = 0$, и выполнив замену переменной интегрирования $\tau = t - t'$, получим

$$H_z(x, t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi D_m}} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^{3/2}} H_{\text{out}}(t - \tau) \exp[-x^2/4D_m \tau]. \quad (4.3)$$

В следующем разделе формула (4.3) будет получена при помощи преобразования Лапласа.

Наконец, приведём ещё одно представление этого интеграла, которое получается заменой $\xi = x/\sqrt{4D_m \tau}$:

$$H_z(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty H_{\text{out}}\left(t - \frac{x^2}{4D_m \xi^2}\right) e^{-\xi^2} d\xi. \quad (4.4)$$

Задача 33. Найти магнитное поле в проводнике, занимающем полупространство $x > 0$, если на его границе при $x = 0$ поле увеличивается по экспоненциальному закону: $H(0, t) = H_{\text{out}} e^{t/\tau}$.

Решение. Вычислив интеграл (4.4) с функцией $H_{\text{out}}(t) = H_{\text{out}} e^{t/\tau}$, получим

$$H_z(x, t) = H_{\text{out}} \exp\left(t/\tau - x/\sqrt{D_m \tau}\right).$$

Однако было бы проще получить этот результат, выполнив формальную замену $\omega = i/\tau$ в решении (2.7), которое описывает стационарный скин-эффект.

2. Метод преобразования Лапласа

Сформулируем задачу о нестационарном скин-эффекте при быстром («мгновенном») включении поля на границе проводника более аккуратно. Будем считать, что поле на границе было равно нулю при $t < 0$, а при $t > 0$ описывается заданной функцией времени $H_{\text{out}}(t)$, т.е.

$$H(0, t) = \begin{cases} 0; & t < 0, \\ H_{\text{out}}(t); & t > 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Предположим также, что при $t = 0$ внутри проводника поле было равно нулю, т.е.

$$H(x, 0) = \begin{cases} 0; & x > 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Соотношения (4.5) и (4.6) называют соответственно граничными и начальными условиями задачи.

Для решения уравнения (4.1) используем преобразование Лапласа. В отличие от преобразования Фурье, изображение Лапласа f_s для произвольной функции $f(t)$ вычисляется при помощи интегрирования только по положительной полуоси времени t , поскольку предполагается, что $f(t) = 0$ при $t < 0$:

$$f_s = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt. \quad (4.7)$$

При этом не обязательно требовать, чтобы функция $f(t)$ убывала при $t \rightarrow +\infty$. Действительно, для сходимости интеграла (4.7) достаточно, чтобы убывало произведение $f(t) e^{-st}$, а этого можно добиться, потребовав, чтобы комплексный параметр $s = s' + is''$ всегда имел положительную вещественную часть $s' > 0$, настолько большую, чтобы

$$|f(t) e^{-st}| = |f(t)| e^{-s't} \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow +\infty$. Обратное преобразование Лапласа (восстановление оригинала $f(t)$) осуществляется по формуле

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\gamma}^{+i\infty+\gamma} f_s e^{st} ds,$$

где параметр $\gamma > 0$ выбирается так, чтобы путь интегрирования в комплексной плоскости s проходил правее всех особенностей функции f_s . Поясним, что особенности могут возникать, если выполнить аналитическое продолжение интеграла (4.7) в область отрицательных или малых положительных значений s' , где сходимость интеграла не гарантирована.

Перейдём к решению уравнения (4.1) с дополнительными условиями (4.5) и (4.6).

Домножив уравнение (4.1) на $\exp(-st)$ и выполнив интегрирование по времени, получим

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial H(x, t)}{\partial t} dt = D_m \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{\infty} e^{-st} H(x, t) dt. \quad (4.8)$$

Левую часть полученного уравнения преобразуем к виду

$$e^{-st} H(x, t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} H(x, t) dt, \quad (4.9)$$

выполнив интегрирование по частям. Первое слагаемое здесь обращается в ноль. Действительно, на верхнем пределе при $t \rightarrow +\infty$ имеем

$$e^{-st} H(x, t) \rightarrow 0,$$

так как s имеет достаточно большую вещественную часть $s' > 0$. На нижнем же пределе

$$e^{s0} H(x, 0) = 0$$

вследствие начального условия (4.6). Второе слагаемое в левой части, а также правая часть уравнения (4.8) выражаются через изображение

$$H_s(x) = \int_0^{\infty} H(x, t) e^{-st} dt \quad (4.10)$$

функции $H(x, t)$. В результате получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2} H_s(x) = \frac{s}{D_m} H_s(x). \quad (4.11)$$

Его следует дополнить граничным условием

$$H_s(0) = H_{0s}, \quad (4.12)$$

где функция

$$H_{0s} = \int_0^{\infty} e^{-st} H_{\text{out}}(t) dt \quad (4.13)$$

суть изображение граничных условий (4.5).

Общее решение уравнения (4.11) имеет вид

$$H_s(x) = A e^{-kx} + B e^{kx},$$

где

$$k = \sqrt{s/D_m}.$$

Константу B следует считать равной нулю, иначе получается, что магнитное поле неограниченно растёт по направлению вглубь проводника вопреки

здоровому смыслу; фактически же равенство $H_s(x) = 0$ при $x \rightarrow +\infty$ является ещё одним граничным условием в дополнение к граничному условию при $x = 0$. Константу \mathbb{B} находим из граничного условия (4.12). Окончательное решение уравнения (4.11) имеет вид

$$H_s(x) = H_{0s} \exp\left(-\sqrt{s/D_m} x\right). \quad (4.14)$$

Чтобы найти решение исходной задачи (4.1) с граничными и начальными условиями (4.5) и (4.6), следует вычислить обратное преобразование Лапласа

$$H(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\gamma}^{i\infty+\gamma} e^{st} H_s(x) ds. \quad (4.15)$$

Для этого сначала заметим, что

$$\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{4\pi D_m t^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_m t}\right) e^{-st} dt = \exp\left(-\sqrt{s/D_m} x\right) \quad (4.16)$$

и, следовательно, $f_s = \exp\left(-\sqrt{s/D_m} x\right)$ есть изображение функции

$$f(t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi D_m t^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_m t}\right). \quad (4.17)$$

По теореме об умножении изображений (теорема о свертке), оригинал произведения двух изображений выражается через свертку оригиналов:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\gamma}^{i\infty+\gamma} e^{st} H_{0s} f_s ds = \int_0^t H_{\text{out}}(t - \tau) f(\tau) d\tau. \quad (4.18)$$

Подставляя (4.17) в (4.18), получаем

$$H(x, t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi D_m}} \int_0^t H_{\text{out}}(t - \tau) \exp\left(-\frac{x^2}{4D_m \tau}\right) \frac{d\tau}{\tau^{3/2}}. \quad (4.19)$$

Сравнивая это выражение с (4.3), видим, что они отличаются величиной верхнего предела в интеграле. Однако, если считать, что в подынтегральном выражении в (4.3) $H_{\text{out}}(t - \tau) = 0$ при $\tau > t$, как это имеет место в (4.19), обе формулы совпадут.

Выполнив в интеграле (4.19) замену переменных, результат можно преобразовать к другой, эквивалентной форме:

$$H(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{4D_m t}}}^{\infty} H_{\text{out}}\left(t - \frac{x^2}{4D_m \xi^2}\right) e^{-\xi^2} d\xi. \quad (4.20)$$

Рассмотрим несколько примеров, когда интегралы (4.19) или (4.20) удаётся вычислить.

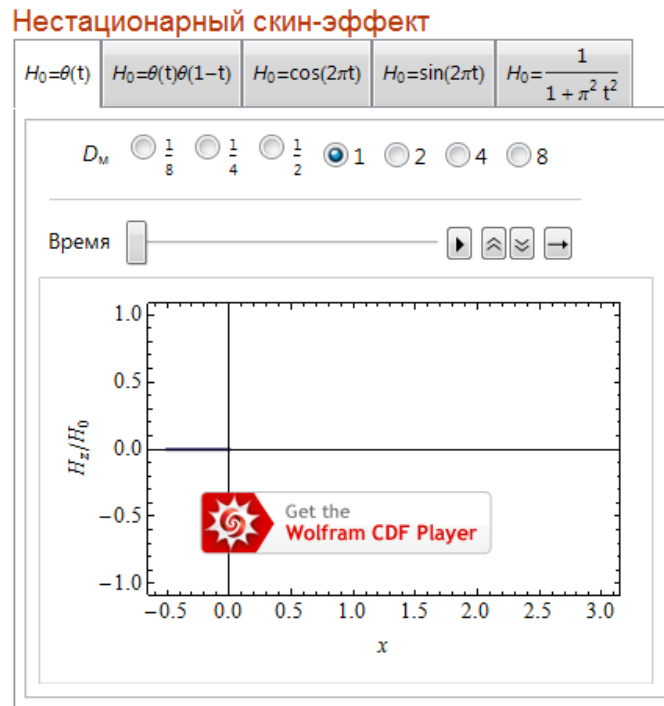


Рис. 4.1: Проникновение нестационарного магнитного поля в полупространство. Запустите интерактивную демонстрацию **в собственном окне** или **в окне веб-браузера**.

Задача 34. Пусть на плоской границе полупространства, занятого проводящей средой в момент времени $t = 0$ мгновенно возникает магнитное поле H_{out} , параллельное поверхности проводника, которое затем остаётся постоянным. Найти магнитное поле в проводнике.

Решение. Подставляя в (4.20) $H_{\text{out}}(t) = H_{\text{out}} = \text{const}$, получим выражение

$$H(x, t) = H_{\text{out}} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4D_m t}} \right) \right], \quad (4.21)$$

которое совпадает с (4.2).

Задача 35. На плоской границе полупространства, занятого проводящей средой в момент времени $t = 0$ мгновенно возникает магнитное поле H_{out} , параллельное поверхности проводника, которое затем остаётся постоянным до момента времени $t = 1$, после чего поле выключается. Найти магнитное поле в проводнике.

Ответ.

$$H(x, t) = H_{\text{out}} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{4D_M t}} \right) \theta(t) - \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{4D_M (t-1)}} \right) \theta(t-1) \right]; \quad (4.22)$$

здесь $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$, а $\theta(t)$ обозначает функцию Хевисайда: $\theta(t) = 0$ при $t < 0$ и $\theta(t) = 1$ при $t > 0$.

Глава 5

Заключение

Рассмотренные примеры позволяют сформулировать общий рецепт решения задач о проникновении в проводящую среду переменного магнитного поля.

- Определить магнитное поле в интересующей области пространства.
 - Случай слабого скин-эффекта. В пределе низких частот магнитное поле проводящего образца, помещённого во внешнее магнитное поле, будет почти таким же, как для магнетика той же формы и с той же магнитной проницаемостью.
 - Случай сильного скин-эффекта. В пределе высоких частот магнитное поле проводящего образца, помещённого во внешнее магнитное поле, будет почти таким же, как для сверхпроводника той же формы, из объёма которого полностью вытеснено магнитное поле. Формально, решение для случая сильного скин-эффекта получается из решения для случая слабого скин-эффекта, если приравнять к нулю магнитную проницаемость μ проводника.
- Определить джоулев нагрев в проводнике.
 - Случай слабого скин-эффекта. Используя симметрию задачи, определить направление токов Фуко и составить замкнутый токовый контур. Вычислить магнитный поток Φ через этот контур и наведённую ЭДС электромагнитной индукции $\mathcal{E} = -\frac{1}{c}d\Phi/dt$. С помощью закона Ома для выбранного контура найти плотность тока \mathbf{j} в проводнике. Проинтегрировав плотность джоулевых потерь $\langle j^2/\sigma \rangle$, найти тепло, которое выделяется во всём объёме проводника.
 - Случай сильного скин-эффекта. Воспользоваться решением задачи о скин-эффекте на плоской границе проводника и выполнить

интегрирование удельной мощности энерговыделения (в расчёте на единицу поверхности) по всей поверхности проводящего образца.

Благодарности

Авторы благодарны С.Л. Синицкому за внимательное рецензирование учебного пособия и ценные замечания.

Приложение А

Полезные математические формулы

1. Вычисление среднего от гармонических функций

Как было отмечено в п. 1, при решении задач о стационарном скин-эффекте (и многих других задач) удобно использовать комплексные переменные вместо вещественных, выделяя вещественные величины в конце решения (до перемножения полей или токов). Напомним основные формулы, которые при этом используются.

Комплексное число

$$A = A' + iA''$$

можно представить в экспоненциальной форме

$$A = |A| e^{i\varphi},$$

где

$$|A| = \sqrt{A'^2 + A''^2}, \quad \varphi = \arg(A) = \arctan(A''/A').$$

При вычислении среднего теплового потока, средней мощности и т. п. величин приходится вычислять среднее

$$\langle \operatorname{Re} A \cdot \operatorname{Re} B \rangle \tag{A.1}$$

от произведения вещественных частей двух функций

$$A = A_0(x) e^{i\omega t} \quad \text{и} \quad B = B_0(x) e^{i\omega t},$$

гармонически зависящих от времени, как в формуле (2.21), где угловые скобки обозначают среднее по периоду:

$$\langle X \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

С помощью формулы Эйлера

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

получаем

$$\operatorname{Re} A = A'_0 \cos \omega t - A''_0 \sin \omega t,$$

$$\operatorname{Re} B = B'_0 \cos \omega t - B''_0 \sin \omega t.$$

Поэтому

$$\langle \operatorname{Re} A \cdot \operatorname{Re} B \rangle = \langle A'_0 B'_0 \cos^2 \omega t + A''_0 B''_0 \sin^2 \omega t - (A'_0 B''_0 + A''_0 B'_0) \cos \omega t \sin \omega t \rangle.$$

Поскольку среднее от суммы равно сумме средних, то можно вычислить среднее от каждого слагаемого независимо. Среднее от $\cos^2 \omega t$ и $\sin^2 \omega t$, равно $1/2$, а среднее от произведения синуса на косинус равно 0, результат усреднения можно записать в виде

$$\langle \operatorname{Re} A \cdot \operatorname{Re} B \rangle = \frac{A'_0 B'_0 + A''_0 B''_0}{2}. \quad (\text{A.2})$$

Заметим теперь, что

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} (A_0 B_0^*) = \frac{\operatorname{Re} ((A'_0 + iA''_0)(B'_0 - iB''_0))}{2} = \frac{A'_0 B'_0 + A''_0 B''_0}{2}.$$

Следовательно,

$$\langle \operatorname{Re} A \cdot \operatorname{Re} B \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (A \cdot B^*). \quad (\text{A.3})$$

Формулу (A.3) запомнить несколько проще, нежели (A.2). Другой, более короткий способ её вывода, приведён в тексте решения задачи 6.

Литература

- [1] Погосов А.Г., Синицкий С.Л., Яковлев В.И. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ (Программа курса). — Новосибирск : Новосибирский государственный университет, 2011. 5
- [2] Мешков И. Н., Чириков Б. В. Электромагнитное поле. — Новосибирск : Наука, 1987. — Т. 1. Электричество и магнетизм. 5, 54
- [3] Тамм И.Е. Основы теории электричества. — М. : Наука, 1966. 5
- [4] Зоммерфельд А. Электродинамика. — М. : Иностран. лит-ра, 1958. 5
- [5] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: учеб. пособие в 10 т. — 2-е перераб. и доп. изд. — М. : Наука, 1982. — Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. — 484 с. 5
- [6] Матвеев А.Н. Электродинамика. — М. : Высш. шк., 1980. 5
- [7] Сивухин Д. В. Общий курс физики. В 5 т. Т. III. Электричество. — 4-е изд., стереот. изд. — М. : ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2004. — 656 с. — ISBN: 5-9221-0227-3; 5-89155-086-5. 5
- [8] Смайт В. Электростатика и электродинамика. — М. : Иностран. лит-ра, 1954. 5, 6
- [9] Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. Сборник задач по электродинамике. — М. : РХД, 2002. — 640 с. 5, 6
- [10] Меледин Г.В., Черкасский В.С. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В ЗАДАЧАХ. — 2-е, испр. и доп. изд. — Новосибирск : НГУ, 2009. — Т. I. Электродинамика частиц и полей. 6
- [11] Бажанова В.В., Меледин Г.В., Эйдельман Ю.И. Электродинамика в задачах. Скин-эффект в задачах / Под ред. Г.В. Меледин, Ю.И. Эйдельман. — Новосибирск : Новосибирский государственный университет, 1997. 6
- [12] Бажанова В.В., Эйдельман Ю.И. Метод изображений в задачах электро- и магнитостатики // Сибирский физический журнал. — 1995. — № 1. — С. 19. 40
- [13] Fathy S., Kittel Charles, Louie Steven G. Electromagnetic screening by metals // Am. J. Phys. — 1988. — Vol. 56, no. 11. — P. 989–992. 54